

# 叶片/叶盘摩擦阻尼结构的非线性模态分析综述

孙业凯<sup>1</sup>, 吴亚光<sup>2,\*</sup>, 王兴<sup>3</sup>, 范雨<sup>2</sup>, 袁杰<sup>4</sup>, 张大义<sup>2</sup>

1. 中国航空发动机集团 中国航发商用航空发动机有限责任公司, 上海, 200241;
2. 北京航空航天大学, 能源与动力工程学院, 北京, 102206;
3. 中山大学, 航空航天学院, 深圳, 518107;
4. University of Strathclyde, Aerospace Centre of Excellence, Glasgow, UK, G1 1XQ)

**摘 要:** 本文首先概述了非线性模态的理论基础以及非线性动力学分析的一般数值方法; 进而针对含干摩擦非线性环节的结构, 总结了阻尼非线性模态的相关研究进展; 在此基础上, 重点综述了国内外近十年来采用阻尼非线性模态数值方法在航空发动机带冠叶片、缘板阻尼器、叶根阻尼与干摩擦阻尼环分析与设计中的应用; 此外, 本文还列举了目前用于验证非线性模态的先进试验技术。最后, 提出了非线性模态在干摩擦阻尼结构动力学分析中亟需解决和关注的若干问题。研究表明, 非线性模态逐渐从理论研究阶段过渡到工程应用阶段。结合模型降维技术, 阻尼非线性模态已经可用于提取带干摩擦阻尼叶片/叶盘高保真有限元模型的模态特征。拓展能量平衡法与非线性模态综合法搭建了非线性模态与稳态响应的桥梁, 可以显著提升基于响应的参数分析效率。非线性模态试验技术的研究处于起步阶段, 尚无法应用于工程复杂结构。

**关键词:** 非线性振动; 阻尼非线性模态; 干摩擦阻尼器; 叶片; 整体叶盘

**中图分类号:** V231.92 **文献标志码:** A

## Review of the Damped Nonlinear Normal Mode in the Analysis of Friction Dampers of Blades/Blisks

SUN Yekai<sup>1</sup>, WU Yaguang<sup>2,\*</sup>, WANG Xing<sup>3</sup>, FAN Yu<sup>2</sup>, YUAN Jie<sup>4</sup>, ZHANG Dayi<sup>2</sup>

1. AECC Commercial Aircraft Engine CO., LTD, Shanghai, 200241, China;
2. School of Energy and Power Engineering, Beihang University, 102206, Beijing, China;
3. School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen Univeristy, 518107, Shenzhen, China;
4. Aerospace Centre of Excellence, University of Strathclyde, G1 1XQ, Glasgow, UK.

**Abstract:** The present survey reviews the definitions of the nonlinear modes and the numerical methods to solve a nonlinear dynamic problem. The progress in application of the damped nonlinear normal modes for structures with frictional damping is reviewed. The related research in the last decade for different friction damping devices are summarized, including the tip shrouded blades, underplatform dampers, blade root damping and friction ring dampers. Furthermore, the experimental works related to nonlinear modal testing are also reviewed. Finally, open problems and future directions are highlighted. We conclude that the nonlinear mode gradually develops from the theoretical stage to engineering stage. Combined with *ad-hoc* reduced order modeling techniques, nonlinear modal analyses have been implemented to reveal the modal characteristics of high-fidelity finite element models of frictionally damped blades/blisks. The Extended Energy Balance Method and Nonlinear Modal Synthesis build a bridge between nonlinear modes and steady-state response, which can significantly improve the efficiency of response-based parameter analysis. Nonlinear modal testing is still in its infancy and cannot be applied to engineering structures yet.

**Key words:** nonlinear vibration; damped nonlinear normal mode; dry friction damper; blade; blisk

## 引言

转子叶片/叶盘是航空发动机重要的做功部件,

收稿日期: 2022-04-28

基金项目: 中国博士后科学基金 (2021M700326); 国家自然科学基金 (52005522, 12072378); 深圳市科技计划资助 (RCYX20210706092137055)。

作者简介: 孙业凯 (1995—), 男, 工程师, 博士, 主要从事非线性模态数值分析和干摩擦阻尼器分析与设计。

通信作者: 吴亚光 (1990—), 男, 博士后, 博士, 主要从事航空发动机结构的振动控制研究。Email: yaguangwu@buaa.edu.cn

实现气流与结构的能量交换。在航空发动机的发展过程中,为了满足市场及适航需求,燃气涡轮发动追求更高的气动效率与推重比,结构设计愈发轻薄。特别是在叶片/叶盘结构的设计中,轻量化的需求使其几乎达到了其结构的设计极限。同时,叶片/叶盘在发动机工作状态中需要承受极高的振动载荷、离心载荷、热载荷以及气动载荷等。由于较高的振动载荷和应力水平,压气机叶片、涡轮叶片的高周疲劳失效长久以来一直是航空发动机失效的主要模式之一,严重影响了发动机的使用安全<sup>[1][2]</sup>。

统计表明,我国生产的发动机,在外场使用中因叶片故障返厂检修的台数占全部检修总台数的35%。美国空军专题报告中指出,在过去30年中,美国空军发生过数百次A类故障,其主要诱因是高周疲劳,研究并解决航空发动机构件高周疲劳和振动控制问题是非常重要而又十分迫切的任务。美国在综合高性能涡轮发动机技术计划(IHPTET)中指出航空发动机结构完整性的研究重点是“最大限度地降低发动机高周疲劳失效,进而大幅度地降低发动机的非定期维护成本”<sup>[3]</sup>。

由于叶片/叶盘结构具有较高的模态密度,很难确保其在运行状态下不发生共振。因此合理设计阻尼是降低峰值振动应力的重要手段,从而能够提升高周疲劳寿命裕度。在众多阻尼形式中,相比于气动阻尼和材料阻尼,干摩擦阻尼器的应用在叶轮机械中提供了大部分的阻尼效果<sup>[4]</sup>。航空发动机中广泛采用的干摩擦阻尼结构形式包括用于高压涡轮叶片的缘板阻尼器、用于低压涡轮叶片的叶冠、用于风扇叶片的凸肩、以及用于压气机整体叶盘的阻尼环等。

然而,干摩擦阻尼器的摩擦界面上存在阻滞-滑移-分离及其状态间转换的复杂非线性行为,传统的线性振动分析方法很难完成对非线性结构的分析。在此需求的牵引下,非线性振动理论和数值分析方法在过去的十多年取得了长足发展,并广泛地应用在了航空发动机叶轮机械的阻尼设计和研究中。

对于航空发动机结构,人们往往关注其稳态振动特性,因此,基于谐波平衡的非线性稳态响应数值方法成为了干摩擦阻尼结构分析与设计中的主流方法。国外很多学者如英国 Imperial College London 的 Pesaresi 等<sup>[5][6]</sup>及<sup>[7][8]</sup>,德国 Leibniz Universität Hannover 的 Panning 等<sup>[9][10]</sup>,意大利 Politecnico di Torino 的 Gastaldi 等<sup>[11][12]</sup>,法国 École Centrale Lyon 的 Laxalde 等<sup>[13][14]</sup>,美国 University of Michigan 的 Lupini 和 Epureanu<sup>[15]</sup>。国内北航洪杰等<sup>[16][17]</sup>,李琳、吴亚光等<sup>[18][21]</sup>,张大义等<sup>[22]</sup>,南航漆文凯等<sup>[23]</sup>,西工大谢永慧等<sup>[24]</sup>,西交大徐自力等<sup>[25]</sup>以及工业界<sup>[26]</sup>都开展过相关研究。北航李琳等<sup>[27]</sup>在关于航空发动机中的干摩擦阻尼器及其设计技术研究进展的综述中也

对非线性稳态响应的分析方法进行详细的介绍。

然而叶片/叶盘结构受到的激励通常难以准确测量,且随工况变化而改变,这就导致强迫响应分析时需要在一定范围内对激振力水平进行遍历,耗费大量计算资源。除了非线性稳态响应的分析方法外,基于非线性模态的分析方法也在近几年里受到了学术界的广泛关注。非线性模态可以表征系统在某阶模态共振时的运动情况,独立于外界激励,直接揭示非线性系统内在本质的动力学特性,具备成为非线性系统普适的高效设计工具的潜质。综上所述,日前在学术界存在两种不同针对摩擦阻尼器的分析策略:非线性稳态响应分析与非线性模态分析。

非线性模态并不是简单地将线性特征模态拓展到非线性系统中。在非线性模态理论中,线性模态具备的不变性、正交性和叠加性均不再成立。除此之外,非线性模态会随着系统能量或振幅的变化而变化。非线性模态可以作为非线性系统简化的工具。通过非线性模态分析可以获得系统各模态族的模态信息与能量或振幅之间的关系,据此一方面可以判断哪些模态族的振型和频率受非线性影响较小,从而在之后对该模态的研究时进行线性替代;另一方面可以判断系统处在什么能级范围时可以表现出与对应线性系统相似的模态特性,确定线性化的合理范围,进而对系统进行线性化,提升计算效率。

随着非线性模态理论和数值计算方法的发展,考虑摩擦阻尼器的非线性模态分析逐渐被学术界接受。其主要的技术路线有 Laxalde 和 Thouvez 提出的非线性复模态<sup>[28]</sup>,以及 Krack 提出的拓展周期运动概念<sup>[29]</sup>。通过以上两种技术路线使得考虑摩擦阻尼的非线性模态分析成为有效的分析策略。

虽然非线性模态分析能够在不考虑外界激励的情况下得到非线性系统的动力学特性,但是结构的强迫响应一直是工程师们关注的热点,模态特性与强迫响应之间的鸿沟阻碍了非线性模态在工程领域的推广。因此,重中之重是建立二者间的联系,学术界也据此做出了不懈努力。Krack 等提出了非线性模态综合<sup>[30]</sup>,可以通过非线性模态响应获得频响曲线。孙业凯等提出了拓展能量平衡法<sup>[31]</sup>,能够高效地通过非线性模态获得不同激振水平下的共振点。

除了揭示结构的动力学特性外,非线性模态的另一作用是进行模型降维。代表性工作包括前文提到的非线性模态综合,以及非线性部件模态综合技术<sup>[32]</sup>。前者实际上更应该称为非线性模态叠加,是线性模态叠加法在非线性的框架下的拓展;后者则是线性部件模态综合法的拓展。基于非线性模态的模型降维方法为干摩擦系统的动力学响应分析、参数分析与结构优化提供了高效的数值工具。

目前,国外的一些航空发动机企业已经开始着眼于采用非线性模态对含摩擦接触的航空发动机结构进行动力学分析与设计,而国内这方面的研究还比较少见。在 Safran 公司的支持下, Laxalde 和 Salles<sup>[33]</sup> 对考虑摩擦阻尼环的压气机整体叶盘进行了非线性复模态分析,旨在阐明稳态响应分析得到的物理现象;对含有叶根干摩擦阻尼的结构进行了非线性模态分析,揭示了阻尼效果对界面参数的敏感性,并与磨损分析结合,探究了阻尼性能的演变。在德国 Siemens 公司和发动机与涡轮联盟公司(MTU)的资助下, Krack 等<sup>[34]</sup> 等通过非线性模态分析和非线性模态综合获得了整圈带冠叶片的频响曲线。上述成果充分表明,非线性模态逐渐从理论概念阶段发展到了工程应用阶段,通过非线性模态分析可以高效评估非线性系统的动力学特性。

航空发动机结构加工、装配过程往往存在误差,其实际结构的动力学特性复杂,仅靠理论建模研究难以满足工程实践的要求。动力学试验是航空发动机研制过程中的关键环节,试验结果也为校核各结构部组件的分析模型提供重要的依据。然而,由于含干摩擦的非线性系统不具有模态叠加的特性,这使得传统的基于线性系统假设的结构模态试验理论和方法难以直接应用于此类结构的试验之中,因而考虑结构非线性特性的动力学试验理论与装置一直是学术界和工业界关注的重点方向。

本文基于作者在非线形模态以及干摩擦阻尼领域的研究积累,并结合近十年来国内外同行发表的重要文献,对非线性模态在航空发动机叶片/叶盘干摩擦阻尼器分析设计上的应用研究进行综述,主要涉及非线性模态理论;用于干摩擦阻尼器分析的非线性模态数值方法;通过非线性模态预测稳态强迫响应的数值计算方法;航空发动机叶片/叶盘干摩擦阻尼器基于非线性模态的分析设计案例;非线性模态试验方法的研究进展;最后对未来发展方向及其面临的技术挑战进行讨论。

## 1 非线性模态理论

非线性模态是线性模态对非线性系统的扩展,换言之,线性模态是非线性模态的退化。在线性系统中,正则模态可以认为是一个线性守恒自治系统的特征解。线性正则模态具有不变性,正交性和线性叠加性。然而,在非线形系统,不变性,正交性和叠加性往往不再成立。非线性模态的固有频率和振型具有能量相关性,会随着振动幅度的变化而变化。因此,非线性模态不是简单地将线性正则模态的概念照搬到非线性系统。有些非线性动力学领域的学者为了更明确地描述非线性系统中模态的概念,把非线性守恒系统的模态称为非线性正则模态(Nonlinear Normal Mode, NNM);

把非线性不守恒系统的模态称为阻尼非线性模态(Damped Nonlinear Normal Mode, dNNM)<sup>[35]</sup>。

### 1.1 非线性模态的定义

对于非线性正则模态,学术界存在两种不同的定义方式:1)基于周期运动的定义;2)基于不变流形的定义。这两种定义方式将会在本章节进行详细的阐述。我们将采用一维杜芬振子模型将会用来展示两种定义的共性与区别。

#### 1.1.1 定义一:基于周期运动

关于非线性模态基于周期运动的定义可以追溯到 20 世纪 60 年代 Rosenberg 发表的关于离散无阻尼非线性系统的研究的论文<sup>[36]</sup>。文章提出,针对非线性守恒自治系统,NNM 被定位为一种同频的一致振动(Vibration unison),即在系统中各广义坐标同时达到平衡点或者最大点,我们称之为一致性定义。Rand<sup>[37][38]</sup>、Szemplinska<sup>[39]</sup>、刘济科等<sup>[40]</sup>都基于周期运动定义的 NNM 的理论做了进一步的研究,以及相关综述<sup>[41]-[43]</sup>。然而,上述定义存在一定的局限性,即内共振发生时(即某些自由度的振动频率是其他自由度的倍频),系统的一致性无法得到保证<sup>[44]</sup>。因此,一致性定义被拓展为基于周期运动的定义,即 NNM 被定义为无阻尼系统的自由周期运动<sup>[45]</sup>。非线性正则模态适用于例如存在几何非线性的守恒系统,但无法应用于考虑阻尼的非线性系统中。

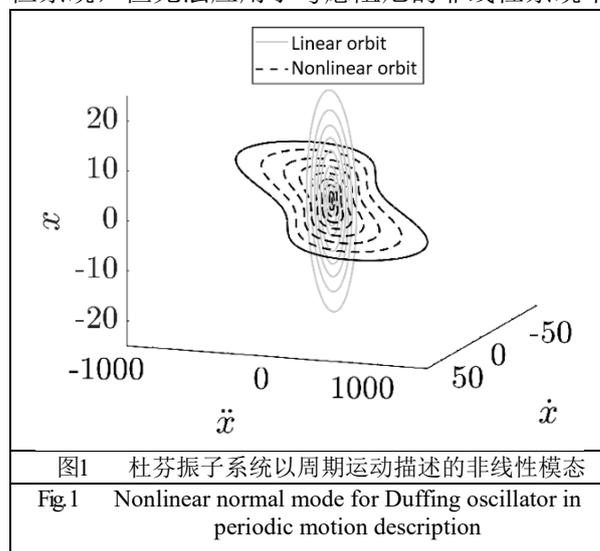


图1 杜芬振子系统以周期运动描述的非线性模态

Fig 1 Nonlinear normal mode for Duffing oscillator in periodic motion description

另外,基于周期运动的定义也存在自身的优势,通用的求解周期解的数值方法都可以用来计算 NNM,如谐波平衡法<sup>[46]</sup>,打靶法<sup>[45]</sup>等。通过上述数值计算方法,每次计算能获得一个周期轨,进而可通过延拓技术捕捉一系列的周期解来描述 NNM 的能量相关性。以单自由度杜芬振子为例,自治系统的动力学方程为:

$$\ddot{x} + x + x^3 = 0 \quad (1)$$

其中  $x$  为位移,上标两点代表对时间的二阶导数。

基于周期运动定义的 NNM 可以用图 1 中的一系列黑色的周期轨所描述, 一系列灰色的周期轨表示退化后线性系统 (不考虑高次刚度) 的模式。

### 1.1.2 定义二: 基于不变流形

NNM 基于不变流形的定义是 Shaw 和 Pierre 于 20 世纪 90 年代提出的<sup>[47][48]</sup>。Shaw 和 Pierre 将 Rosenberg 对 NNM 的定义进行了广义化, 把 NNM 定义为高维相空间中的不变流形(Invariant manifold)。这里的不变流形可以理解为在高维相空间中的超曲面, 这个超曲面与退化后线性系统对应的线性模态子特征空间相切于平衡点。不变流形的定义是一种几何层面的定义, NNM 在任何状态都会落在相空间中的不变流形中。仍然以杜芬振子为例, 该 NNM 的不变流形如图 2 中黑色的超曲面所示, 灰色平面为该 NNM 对应的退化线性系统模态的子特征空间。该 NNM 在对应能级的运动状态即为该不变流形上的一个点, 可以通过唯一的三维坐标来表述。唯一性在高能级的内共振时会遇到挑战, 这时不变流形折叠到一起, 所以每个点不再只对应唯一的状态。

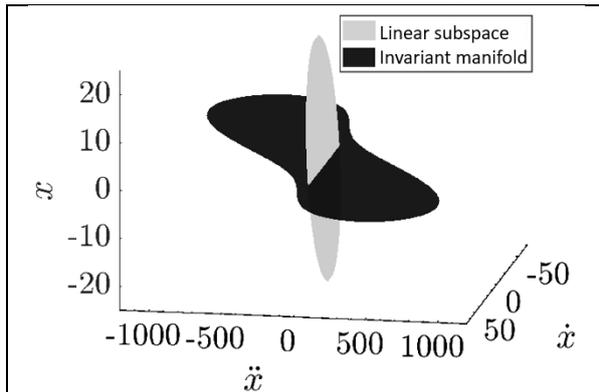


图2 杜芬振子系统以不变流形描述的非线性模态

Fig.2 Nonlinear mode for Duffing oscillator in invariant manifold description

以含高次刚度非线性的二自由度弹簧质量系统为例:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + 2x_1 - x_2 + x_1^3 = 0 \\ \ddot{x}_2 + 2x_2 - x_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

各自由度的位移为  $x_i$ , 其中  $i=1,2$  为自由度编号。图 3 展示了该系统的 NNM, 其中包含 1: 3 高能量内共振点, 此时该 NNM 的不变流形会折叠起来变得异常复杂, 前文描述的唯一性将不再成立。

基于不变流形的定义不再受到周期假设的约束, 不仅可以用于无阻尼非线性系统, 也可以适用于陀螺系统以及非线性不守恒系统来描述 dNNM。Haller 和 Ponsioen 通过波普子流形(Spectral Submanifold)证明了 dNNM 的存在和唯一性<sup>[49]</sup>。不变流形可通过解析法或数值法获得。解析法一般是通过多项式级数展开来参数化不变流形的几

何特征。常见的解析法大多基于摄动法<sup>[50]</sup>: 规范形法(Normal Form)<sup>[51][52]</sup>, 多尺度法<sup>[53]</sup>和波普子流形<sup>[49]</sup>及相关综述<sup>[54][56]</sup>。数值计算方法是基于求解偏微分方程来获得不变流形。上述方法均需要进行大量的计算。值得注意的是, 上述计算不变流形的解析方法和数值方法都无法适用于存在不连续非线性的系统。

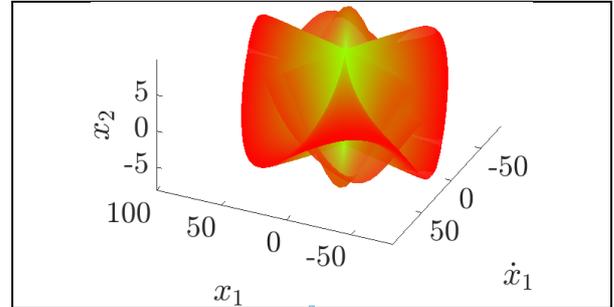


图3 2自由度高次刚度非线性系统的内共振

Fig.3 Internal resonance of the 2 degrees of freedom nonlinear system with higher-order stiffness

### 阻尼非线性模态

对于非线性不守恒系统, 系统的阻尼非线性模态不再呈现周期性。如系统中存在正阻尼, 模态振幅随着时间呈衰减趋势; 如系统存在负阻尼, 模态振幅随着时间变大。通过前文对非线性模态的两种定义可知, dNNM 只能通过不变流形来定义。在相空间中, dNNM 会呈现为一条最终落在超曲面内的曲线。如果正阻尼存在, 那这条曲线会起始于不变流形中的某一点, 随着时间沿着不变流形的曲面逐渐回归到平衡点。虽然可以通过不变流形来定义含摩擦环节非线性系统的 dNNM, 但是由于摩擦阻尼存在不连续性, 相关的解析与数值方法无法应用。

学者们为了实现对含干摩擦系统的非线性模态分析, 通过两种不同的技术路线, 将基于周期运动的定义延伸到了非线性不守恒系统中, 使得考虑摩擦阻尼的 dNNM 可以通过周期运动 (或拟周期运动) 表示。第一种技术路线由 Laxalde 和 Thouverez 于 2007 年提出, 其主要是将复模态延伸到非线性系统中, 通过模态阻尼比来描述系统中能量的不守恒性, 称为非线性复模态(Complex Nonlinear Mode, CNM)<sup>[28]</sup>。在 CNM 的框架下, 考虑摩擦阻尼的 dNNM 可以通过一个拟周期解和衰减因子来表示。第二种技术路线由 Krack 于 2015 年提出, 称为拓展周期运动概念(Extended Periodic Motion Concept, EPMC)<sup>[29]</sup>。在 Krack 提出的 EPMC 中, 通过在非线性不守恒系统中添加一个虚拟粘滞阻尼, 可以平衡系统中的能量损失或输入, 从而使 dNNM 可以用一个周期解和模态阻尼比 (即虚拟粘滞阻尼) 来表述。

通过 CNM 和 EPMC, 人们可以延续前述周期运动的定义表征考虑摩擦阻尼的 dNNM, 并使

得通用的周期运动求解方法可以应用。由于假设条件不同, CNM 只能在频域中通过谐波平衡求解, EPMC 则既可以通过谐波平衡求解, 也可以在时域中使用打靶法求解。Jahn 等<sup>[57]</sup>和孙业凯等<sup>[58]</sup>对 CNM 和 EPMC 进行了详细的对比, 读者可参考相关文献。另外在孙业凯等<sup>[58]</sup>的研究中表明, 在 EPMC 中, 相比于虚拟粘滞阻尼, 添加虚拟滞回阻尼可以提升工程结构中的计算效率。基于 EPMC 概念下, 添加虚拟粘滞阻尼可以通过时域或频域的数值分析方法计算; 添加虚拟滞回阻尼只能通过频域的数值分析方法计算。

以上两种技术路线不仅可以用于干摩擦阻尼器性能的分析, 也可用于阐释转子碰摩现象的产生机制<sup>[59]</sup>。关于 CNM 和 EPMC 详细的公式推导和分析方法将会在章节 4 中详细介绍。

## 2 非线性动力学数值方法

本章节介绍非线性动力学一般数值方法, 下文所述方法不局限于考虑摩擦阻尼的 dNNM 求解, 同样可以适用于求解非线性守恒自治系统的 NNM; 也可以用于求解稳态响应。

对于含非线性环节的结构离散模型, 动力学常微分方程的一般形式为:

$$M\ddot{\mathbf{Q}} + C\dot{\mathbf{Q}} + K\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{F}_e \quad (3)$$

其中  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{C}$  为阻尼矩阵,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{Q}$  为广义坐标系下节点的位移,  $\dot{\mathbf{Q}}$  和  $\ddot{\mathbf{Q}}$  为广义坐标系下节点的速度和加速度,  $\mathbf{F}_{nl}$  为广义坐标系下节点所受的非线性力,  $\mathbf{F}_e$  为系统所受的激励。若激励为简谐形式, 基于公式(1)得到的广义坐标系下节点的位移通常被称为稳态响应。

当激励项和阻尼项通常不被考虑时, 退化为非线性自治系统, 动力学方程为:

$$M\ddot{\mathbf{Q}} + C\dot{\mathbf{Q}} + K\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{0} \quad (4)$$

若非线性力  $\mathbf{F}_{nl}$  为守恒力, 广义坐标系下节点的位移  $\mathbf{Q}$  为周期解, 可以表示系统的 NNM; 当非线性力  $\mathbf{F}_{nl}$  为不守恒力时, 则 dNNM 的位移  $\mathbf{Q}$  不再呈现周期性。求解非线性模态的本质是获取如式(2)所示自治系统的拟周期解。

### 2.1 算法分类

现有数值求解方法可简单分为两大类: 1) 时域方法, 包括时间积分法 (Time integration method)<sup>[60]</sup>, 打靶法 (Shooting method)<sup>[45]</sup>和正交配置法 (Orthogonal collocation method)<sup>[61]</sup>等; 2) 波谱类方法, 包括傅里叶-伽辽金方法 (Fourier-Galerkin method)<sup>[46]</sup>和小波-伽辽金方法 (Wavelet-Galerkin method)<sup>[62]</sup>等。

时间积分法是通过一个初始广义坐标和微分方程在离散时域中基于显格式或隐格式进行积分

<sup>[60]</sup>。常见的显格式方法如龙格-库塔法 (Runge-Kutta method); 常见隐格式如 Newmark 法等。时间积分法存在计算量大, 消耗内存, 显格式可能存在数值不稳定性以及由时间步长引起计算错误等缺陷。打靶法则针对周期运动, 是在时间积分法的基础上添加一个周期边界条件, 将初始值问题转换成两点边值问题。在时间周期内, 仍然使用时间积分法进行求解。正交配置法通过正交多项式实现求解非线性常微分方程的边界值。正交配置法已经被成功地应用于几款软件中, 如 AUTO<sup>[61]</sup>, colsys<sup>[63]</sup>和 coco<sup>[64]</sup>。由于对计算内存的高需求, 正交配置法很少用于求解带非线性特征的全尺寸结构的非线性动力学特征。

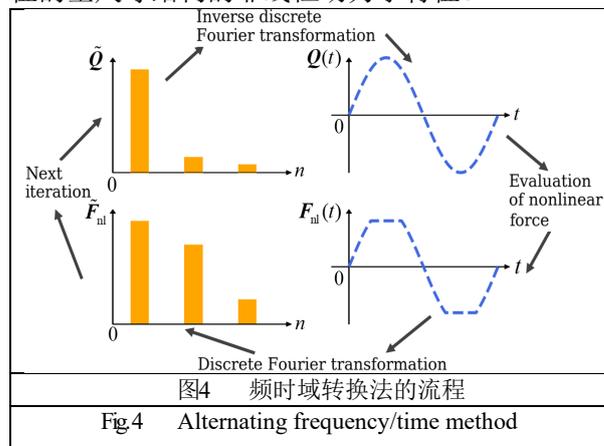


图4 频时域转换法的流程

Fig 4 Alternating frequency/time method

在波谱类方法中, 通常使用一系列简单周期函数以及对应系数表示周期解, 又被称为伽辽金类方法。使用周期函数作为基函数保证了该类方法可以适用于周期问题的求解。其中最常见傅里叶-伽辽金方法又被称为多阶谐波平衡法 (Multi-Harmonic Balance Method, M-HBM)<sup>[46]</sup>。在 M-HBM 中, 周期解被分解为列傅里叶级数:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \left( \sum_{n=0}^{N_h} \tilde{\mathbf{Q}}_n e^{in\omega t} \right) \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{Q}}_n = \mathbf{Q}_n^c - i\mathbf{Q}_n^s \quad (6)$$

其中  $n$  为谐波数,  $N_h$  为最高阶谐波数,  $\omega$  为基频,  $\mathbf{Q}_n^c$  和  $\mathbf{Q}_n^s$  为对应谐波阶数的余弦与正弦系数,  $\tilde{\mathbf{Q}}_n$  是其复数表达形式,  $\mathbf{R}$  为取实部。

M-HBM 的思路是通过伽辽金映射将时域内的非线性微分方程投影到频域内, 将非线性常微分方程组转换为非线性代数方程组:

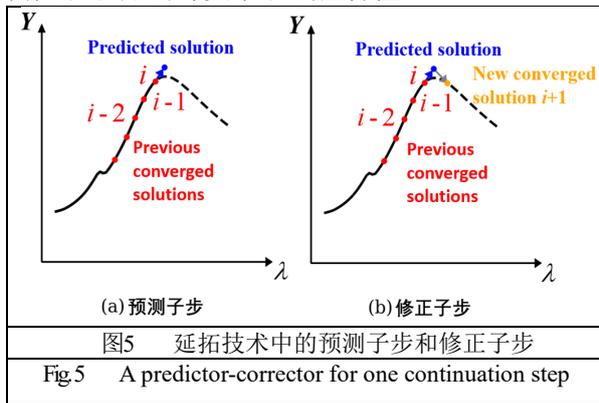
$$\tilde{\mathbf{Z}}(\omega)\tilde{\mathbf{Q}} + \tilde{\mathbf{F}}_{nl}(\tilde{\mathbf{Q}}) = \tilde{\mathbf{F}}_e \quad (7)$$

这里  $\tilde{\mathbf{Z}}$  为频域内的动刚度矩阵,  $\tilde{\mathbf{Q}}$  为由周期解的各阶复数傅里叶系数构成的向量,  $\tilde{\mathbf{F}}_{nl}$  与  $\tilde{\mathbf{F}}_e$  分别为频域内的干摩擦非线性力与激振力。当求解非线性模态时, 则忽略激振力。可以采用牛顿拉夫逊法迭代求解目标非线性代数方程组。为了进一步提升算法的收敛性和计算效率, 需要给出解析形式的雅各比矩阵。

由于摩擦接触力的非线性力在频域内很难直接获得, Cameron 和 Griffin 提出了频域转换法 (Alternating frequency/time method)<sup>[65]</sup>。频域转换法的操作步骤详见图 4。通过该方法, 频域的摩擦接触力可以通过正逆傅里叶变换获得。

## 2.2 延拓技术

为了获得非线性系统的动力学特性随系统参数的变化趋势, 一般采用延拓技术(Continuation technique), 在延拓过程中, 非线性动力学特征称为延拓结果(用  $Y$  表示), 自变量系统参数(用  $\lambda$  表示)称为延拓参数<sup>[66]</sup>。延拓过程是指从初始延拓参数出发, 经历多个延拓步, 描绘出整个延拓结果随着延拓参数的变化曲线。延拓技术存在两个优点: 1) 能够区分两个非常相近解; 2) 能够找到同一延拓参数下的不同延拓结果, 即能捕捉到非线性系统中刚化和软化效应, 模态转化, 内共振和分岔等复杂非线性特征<sup>[67]</sup>。



一个完整的延拓步是通过一个预测子步和多个修正子步获得当前延拓步下系统的解, 如图 5。常见预测的方法有割线法, 切线法和基于拉格朗日多项式的高阶插值法; 常见修正方法有弧长法, 伪弧长法等<sup>[66]</sup>。

结合延拓技术的 M-HBM 在学术界广泛使用。近些年, Cochelin 和 Vergez 开发了一套高阶纯频域的 M-HBM 公式用来延拓周期解, 叫渐进数值方法(Asymptotic numerical method)<sup>[68]</sup>。渐进数值方法需要将非线性动力学方程进行二次重构使得非线性项尽可能呈现为二次形式。渐进数值方法能够提高延拓过程的效率, 但是对于非连续非线性力的二次重构较难直接实现。Woiwode 等<sup>[69]</sup>比较了基于 M-HBM 的传统延拓方法与渐进数值方法。渐进数值方法在考虑摩擦阻尼的非线性系统中使用的可行性仍有待探索。

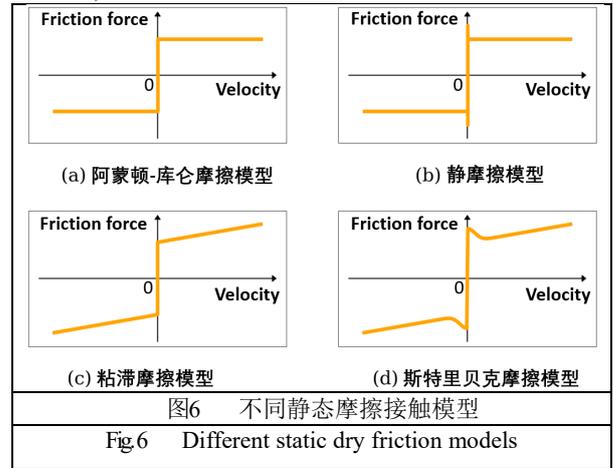
## 3 摩擦接触模型

摩擦接触模型描述了摩擦界面接触力与相对位移的本构关系, 其准确性决定了干摩擦系统动

力学分析的精度。现有的摩擦接触模型可以简单地分为两类: (1) 静态模型; (2) 动态模型。静态模型把摩擦力表示成接触点相对速度的函数。动态模型的接触力则需要根据时间历程获得。本章节将分别对其中的代表性模型进行介绍。

### 3.1 静态模型

常见的四种静态摩擦接触模型包括(图 6): 阿蒙顿-库仑摩擦模型 (Amontons-Coulomb friction), 静摩擦模型 (Stiction), 粘滞摩擦模型 (Viscous friction)和斯特里贝克摩擦模型 (Stribeck friction)。



阿蒙顿-库仑摩擦模型是最早采用的干摩擦模型, 由 Amontons 和 Coulomb 先后完善。其中库仑摩擦力等于摩擦系数和正压力的乘积并且于滑移速度相反。Morin 通过试验发现在速度为 0 时的摩擦力大于库仑摩擦力, 提出了静摩擦系数和动摩擦系数的区别。Reynolds 定义了粘滞摩擦模型, 是粘滞效应和库仑摩擦力的结合。Stribeck 通过试验发现了斯特里贝克效应, 即在当摩擦力由静摩擦向库仑摩擦力变化时, 摩擦力随速度的增大而减小。斯特里贝克摩擦模型综合考虑了库仑摩擦力, 粘滞效应和斯特里贝克效应。

### 3.2 动态模型

动态摩擦接触模型的接触力与历程相关。现有的动态模型可以分为两类: (1) 宏滑移摩擦接触模型; (2) 微滑移摩擦接触模型。将动态摩擦模型建立在接触面主节点间或者分布式的接触节点间, 即可描述接触面间的迟滞特征, 从而开展动力学分析。

#### 3.2.1 宏滑移模型

宏滑移摩擦接触模型即指不考虑微滑移效应的摩擦接触模型, 这类模型一般用来描述接触界面中一对接触节点的摩擦接触力。常见的宏滑移摩擦接触模型依靠詹金斯单元 (Jenkins element)

实现。

Griffin 提出一维摩擦接触模型由单个切向詹金斯单元及常法向压力  $N_0$  组成 (图 7) [70]。在詹金斯单元中,  $x(t)$  为相对位移,  $k_t$  表示切向接触刚度,  $w(t)$  是代表滑移内部变量,  $\mu$  为摩擦系数。一维摩擦接触模型只能考虑一个方向的摩擦力, 有两个接触状态即粘滞和滑移 (图 7), 且无法考虑切法向耦合振动带来的正压力波动。这里, 不同颜色的曲线代表不同激振力水平下的振动情况,  $F_0$  代表正则化激振力幅值,  $F_{nl}$  代表摩擦力,  $\tau$  为无量纲时间。

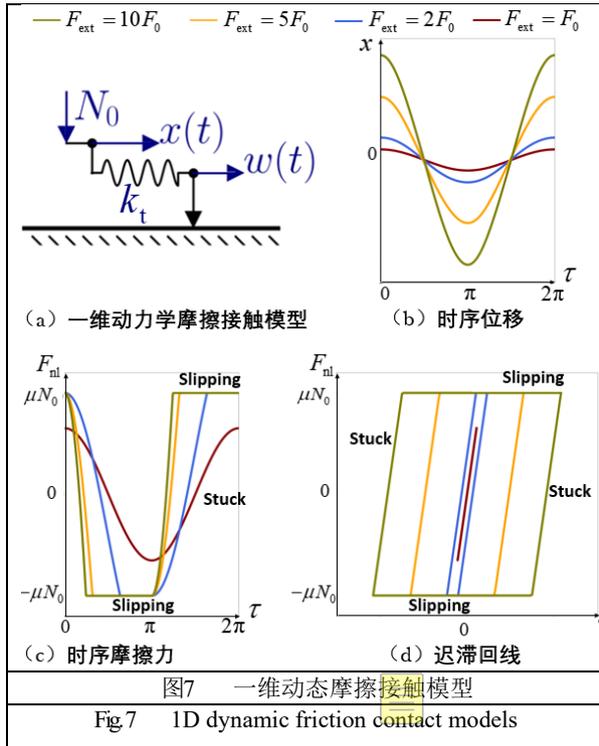


图7 1D dynamic friction contact models

Yang 等提出了二维摩擦接触模型 (图 8, 也有学者称为一维摩擦接触变法向压力模型), 纳入了切法向耦合的影响 [71]。该模型包括一个切向詹金斯单元及法向弹簧 (法向接触刚度为  $k_n$ , 法向相对位移为  $y(t)$ ) 组成。由于法向弹簧的存在, 接触节点的法向位移和接触分离可以被考虑, 法向力  $F_{nl,n}$  的大小也会随时间变化, 进而引起切向摩擦力  $F_{nl,t}$  时变。如接触节点初始状态为分离, 则施加法向压力  $-k_n \Delta$ ,  $\Delta$  为初始接触间隙。该接触模型在缘板阻尼器等接触面内存在主要运动方向的摩擦阻尼器动力学分析中应用广泛。

Yang 和 Menq 提出了三维摩擦接触模型 (图 9), 由两个正交切向詹金斯单元及法向弹簧组成 [72], 其中  $k_{t1}$  与  $k_{t2}$  代表两个方向的切向刚度, 此时需要两个滑移内部变量  $w_1(t)$  与  $w_2(t)$ 。通过正交切向詹金斯单元可以表征接触面内任意方向的摩擦力, 其中  $F_{nl,x}$  与  $F_{nl,y}$  为摩擦力在接触面内

两个方向的分量, 其大小为法向接触力  $F_{nl,z}$  与摩擦系数  $\mu$  的乘积。该三维摩擦接触模型在叶冠等具有接触面内二维切向运动的摩擦阻尼器的动力学分析中应用较多。

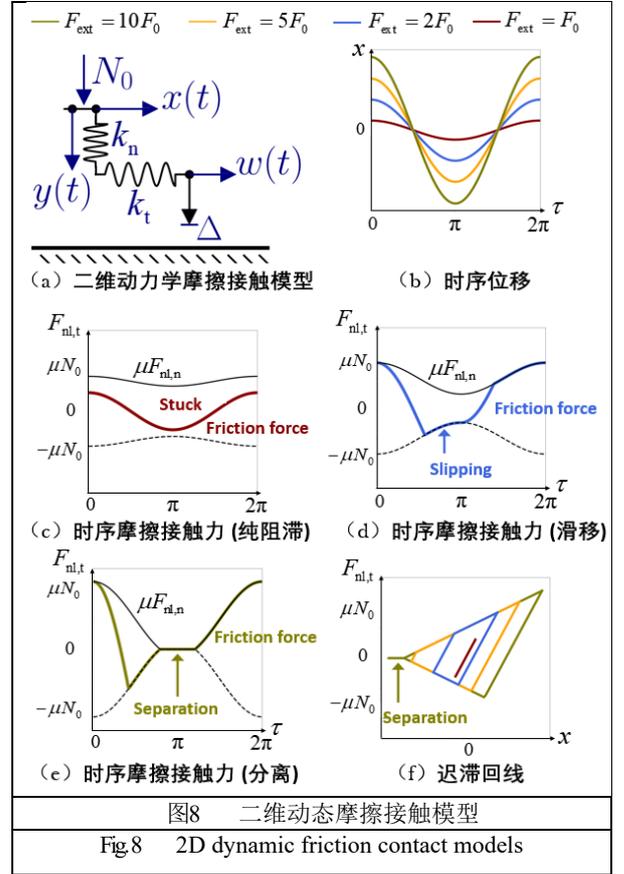


图8 2D dynamic friction contact models

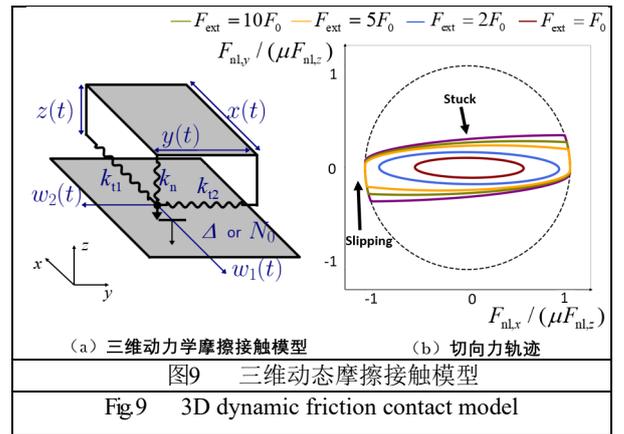


图9 3D dynamic friction contact model

### 3.2.2 微滑移模型

微滑移模型是指考虑微滑移效应的摩擦接触模型, 即一个接触模型能考虑部分滑移部分粘滞的状态。图 10 展示了通过宏滑移摩擦模型与微滑移摩擦模型获得的迟滞回线对比。常见的微滑移的摩擦模型如 Iwan 模型 [73], Dahl 模型 [74], LuGre 模型 [75], Bouc-Wen 模型 [76][77] 和 Valanis 模型 [78] 等。在微滑移摩擦模型中, 大部分参数都没有实际物理意义, 微滑移模型中的参数通常都是

通过试验校核的。此外，有些微滑移模型如 Dahl 模型和 Valanis 模型是一维的，即只能描述一个方向的摩擦力。

为了将微滑移模型更好地使用在动力学分析中，Laxalde 和 Thouverez<sup>[28]</sup>用一个 Dahl 模型代替三维摩擦接触模型中的两个詹金斯单元。为了使用 Dahl 模型可以考虑两个正交方向的摩擦力，两个方向的切向位移被定义为复数形式用来模拟接触界面内二维摩擦力。另外，Pesaresi 等<sup>[5]</sup>同样进行了类似的尝试，将三维摩擦接触模型中的两个詹金斯单元替换为两个独立的 Valanis 模型，尽管两个 Valanis 模型没有产生耦合效果，但实现了在一定精度下节约计算资源的目的。

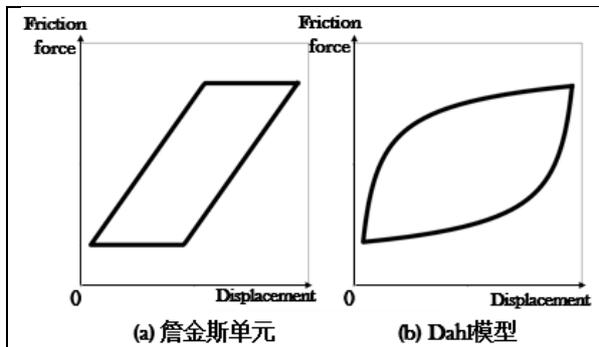


图10 宏滑移摩擦模型(詹金斯单元)与微滑移摩擦模型(Dahl)迟滞回线对比

Fig.10 Hysteresis loops of the macroslip model (Jenkins element) and microslip model (Dahl)

## 4 阻尼非线性模态求解方法

章节 2 回顾了求解一般非线性动力学方程的不同数值计算方法。章节 3 总结了常用的动力学摩擦接触模型用于表征摩擦接触力。通过两种不同的技术路线将基于周期运动定义的 NNM 延伸至非线性不守恒系统中的 dNNM。

本章节将分别给出非线性复模态 CNM 与拓展周期运动概念 EPMC 下求解阻尼非线性模态的详细过程。在此基础上，人们可以使用周期运动问题的常规求解技术求解非线性不守恒系统的 dNNM。

可通过 M-HBM 法求解阻尼非线性模态，即在不考虑激振力与材料阻尼的条件下求解动力学方程(式(5))。对于 CNM 和 EPMC，其区别在于动刚度矩阵  $\tilde{\mathbf{Z}}(\omega, \zeta)$  不同， $\zeta$  为模态阻尼比。为方便后续推导，将动刚度矩阵表示为各谐波历次的组集：

$$\tilde{\mathbf{Z}}(\omega, \zeta) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Z}}_0 & & & \\ & \tilde{\mathbf{Z}}_1 & & \\ & & \dots & \\ & & & \tilde{\mathbf{Z}}_{N_h} \end{bmatrix} \quad (8)$$

下面将详细给出 CNM 和 EPMC 的动刚度矩。

### 4.1 非线性复模态概念

Laxalde 和 Thouverez 于 2007 年提出了使用非线性复模态计算考虑摩擦阻尼的 dNNM<sup>[28]</sup>。在考虑摩擦阻尼的自治系统中，由于摩擦力引起的能量耗散使该系统的自由运动呈衰减趋势。在 CNM 中，dNNM 通过多阶衰减谐波基函数的叠加来表示拟周期解  $\mathbf{Q}$ ：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{R} \left( \sum_{n=0}^{N_h} \tilde{\mathbf{Q}}_n e^{(-\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})n\omega t} \right) \quad (9)$$

其中  $\zeta$  为模态阻尼比。

式(7)带入式(5)，一般忽略粘滞阻尼，可将非线性动力学方程投影到频域中，得到各阶谐波数的动刚度矩阵分量：

$$\tilde{\mathbf{Z}}_n(\omega, \zeta) = \mathbf{K} - n^2 \omega^2 \mathbf{M} + 2n^2 \omega^2 \zeta^2 \mathbf{M} - 2in^2 \omega^2 \zeta \sqrt{1-\zeta^2} \mathbf{M} \quad (10)$$

### 4.2 拓展周期运动概念

Krack 于 2015 年提出 EPMC，通过添加虚拟粘滞阻尼来平衡由非线性不守恒力造成的能量损失<sup>[29]</sup>；孙业凯等尝试添加虚拟滞回阻尼达到相似的效果<sup>[58]</sup>。为了方便描述，本文对 EPMC 添加虚拟粘滞阻尼简称为 EPMC-V，对 EPMC 添加虚拟滞回阻尼简称为 EPMC-H。

#### 4.2.1 虚拟粘滞阻尼

在 EPMC-V 中，通过添加负的虚拟粘滞阻尼矩阵  $-2\omega\zeta \mathbf{M}\dot{\mathbf{Q}}$  到非线性自治系统中：

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} - 2\omega\zeta \mathbf{M}\dot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} + \mathbf{F}_{nl} = \mathbf{0} \quad (11)$$

通过 M-HBM 将公式(9)变换到频域即可得到  $n$ 阶谐波数的动刚度矩阵：

$$\tilde{\mathbf{Z}}_n(\omega, \zeta) = \mathbf{K} - n^2 \omega^2 \mathbf{M} - 2in\omega^2 \zeta \mathbf{M} \quad (12)$$

#### 4.2.2 虚拟滞回阻尼

在 EPMC-H 中，通过添加负的虚拟滞回阻尼矩阵  $-2i\zeta \mathbf{K}\mathbf{Q}$  到非线性自治系统中，由于滞回阻尼为虚数，只能直接添加到频域的动刚度矩阵中，得到：

$$\tilde{\mathbf{Z}}_n(\omega, \zeta) = \mathbf{K} - n^2 \omega^2 \mathbf{M} - 2i\zeta \mathbf{K} \quad (13)$$

### 4.3 小结

本章综述了基于 CNM 和 EPMC 计算干摩擦系统 dNNM 的数值方法，以 M-HBM 为例，对动态刚度矩阵的具体构造给出了详细推导过程。关于 CNM 和 EPMC 方法的不同，可以简单概述为以下两点，详细对比结果见文献<sup>[57][58]</sup>。

(1) CNM 只能通过 M-HBM 求解。EPMC-

V 得益于虚拟迟滞阻尼, 可以使用打靶法等其他时域周期问题的求解方法。EPMC-H 中的虚拟滞回阻尼只能在频域中定义, 因此无法使用时域周期问题的求解方法。

(2) CNM 直接定义拟周期解(含衰减项), 所以在频域转换对非线性力的描述中存在一定误差。

## 5 阻尼非线性模态预测共振点

在 CNM 和 EPMC 提出后, 通过非线性模态分析评估干摩擦阻尼器的模态特性已经受到了广泛认可。在此基础上, 学术界发展了以 dNNM 预测频响曲线或者共振点的不同数值方法, 包括 Krack 等提出的非线性模态综合法 NMS<sup>[30]</sup> 和孙业凯等提出的拓展能量平衡法(Extended-Energy Balance Method: E-EBM)<sup>[31]</sup>。

### 5.1 非线性模态综合法

非线性模态综合(Nonlinear Modal Synthesis: NMS)是一种使用 dNNM 获得系统稳态响应的数值方法<sup>[30][79]</sup>。首先采用 EPMC 或 CNM 计算系统的 dNNM; 然后基于主模态共振假设, 将动力学方程投影到由目标非线性模态与其余线性模态构成的基向量上, 形成解耦的非线性振子与线性振子; 最终根据分析目的, 进行单自由度非线性振子的迭代计算, 并综合其余线性模态的响应, 获得频响曲线(图 11)。

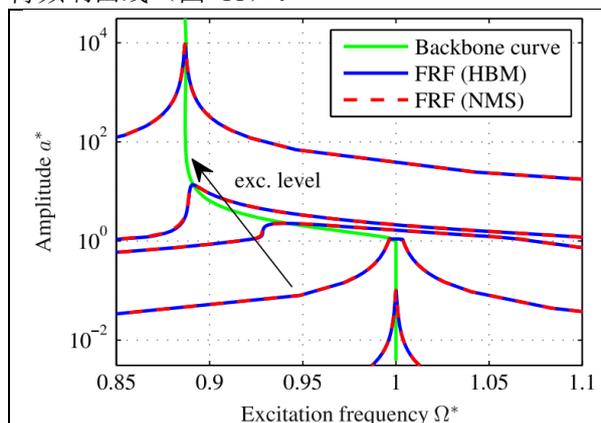


图11 通过dNNM结合NMS获得频响与直接通过M-HBM获得的频响对比<sup>[30]</sup>

Fig 11 Comparison of frequency response obtained by M-HBM and dNNM combined with NMS<sup>[30]</sup>

在频响曲线的计算上, 该方法与 M-HBM 稳态响应算法相比在计算效率与精度上都没有优势。但是, 当人们只关注于共振点的动力学行为时, 采用非线性模态综合法, 并对激振力等参数进行延拓, 可以直接获得不同参数组合下的共振响应, 耗时与采用稳态响应分析时计算一条频响曲线相近。产生误差的原因是非线性模态间的相互作用,

即内共振。因此, 当正压力过小或激振力过大时会引入不可忽略的误差, 无法预测到由内共振带来的多共振峰现象。

### 5.2 拓展能量平衡法

E-EBM 是一种基于 dNNM 直接获得振幅-激励水平曲线并预测系统的非线性共振点强迫响应的数值计算方法<sup>[31]</sup>。相比于 NMS, E-EBM 只能用来预测共振点, 即通过 dNNM 计算出共振响应与外界激励大小之间的关系。E-EBM 基于能量平衡法, 在非线性动力学系统中类似的能量分析方法可以参考<sup>[50][80][81]</sup>。能量平衡法最初运用于非线性守恒系统, 并通过解析方法获得振幅-激励曲线<sup>[82]</sup>, 并可以预测孤立子的存在<sup>[31][83]</sup>。Cenedese 和 Haller 通过 Melnikov 方法解析证明能量平衡法成立条件<sup>[84]</sup>。E-EBM 的实现基于以下假设: ①系统表现为单非线性模态主导振动; ②共振点的强迫响应与非线性模态所对应同频率且同振幅的拟周期解具有一致性。

在 E-EBM 方法中, 以 dNNM 的拟周期解作为系统边界, 计算出系统边界内外的能量交换。即, 外界激励增加到系统内的能量会被系统内耗散的能量抵消。在已知 dNNM 的模态振幅的情况下, 系统内耗散的能量可以直接获得, 且为常数。但外部激励增加到系统内的能量正相关于其外部激励的大小。通过能量平衡即可获得未知的外部激励大小。经过 dNNM 和 E-EBM, 可以获得响应-外激励水平曲线(图 12), 图例中  $F_0$  表示激振力幅值。

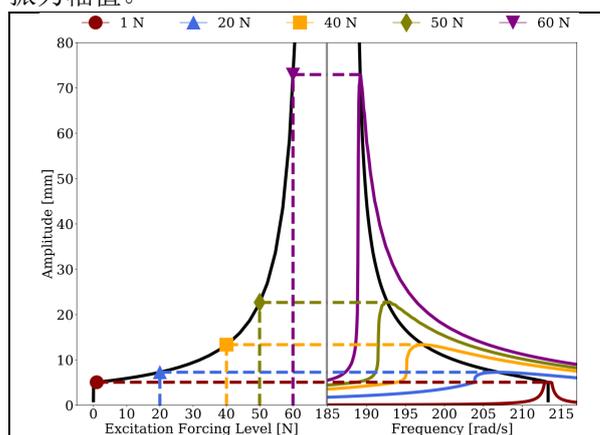


图12 通过dNNM和E-EBM获得的共振点与通过M-HBM获得的频响共振点对比<sup>[31]</sup>

Fig 12 Comparison of resonant solutions obtained by M-HBM and dNNM combined with E-EBM<sup>[31]</sup>

## 6 阻尼非线性模态在干摩擦阻尼器分析与设计中的应用

本章节综述在国内外学术界关于阻尼非线性模态在干摩擦阻尼器的分析和设计中的应用研究。将依据干摩擦阻尼器的形式进行分类总结, 包括

转子叶片的叶冠摩擦接触、缘板阻尼器、叶根榫头摩擦接触和针对于整体叶盘的干摩擦阻尼环。

### 6.1 叶冠干摩擦阻尼

Krack 等<sup>[30][34]</sup>使用 EPMC 求解 dNNM 并通过 NMS 获得系统的非线性频响曲线，并将其应用于整圈带冠涡轮叶片的动力学特性分析。对于具有 30 个扇区，每个扇区包含 25641 个自由度数（含 51 个非线性自由度）的带冠叶盘结构有限元模型（图 13），结合周期减缩与动态凝聚等降维方法，当保留 7 阶谐波时，计算一条脊线的时间仅为 9 分钟，当正压力在有效工作范围内时，共振响应几乎与稳态响应计算一致（图 14）。

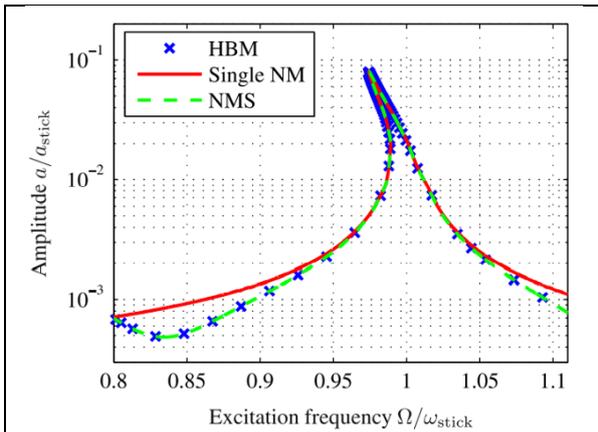
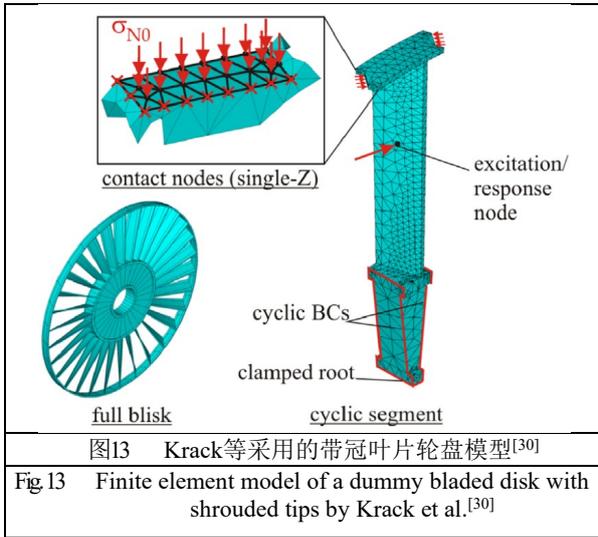


图14 采用NMS与M-HBM计算获得的整圈带冠叶片的频响对比<sup>[30]</sup>

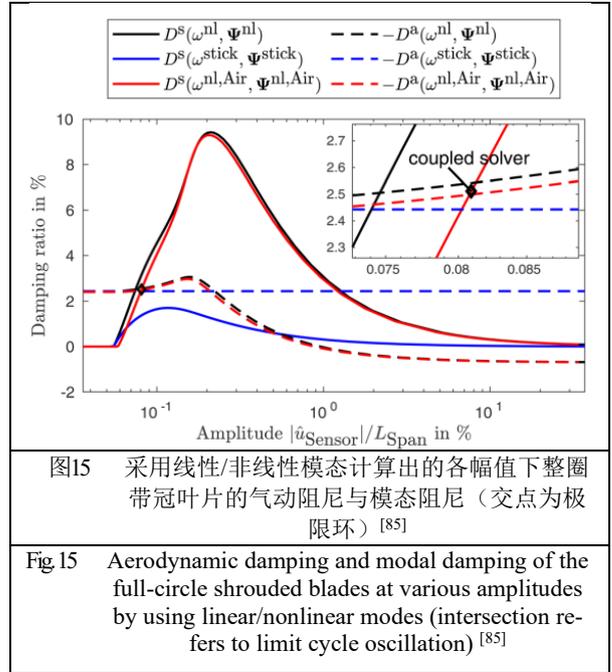
Fig.14 Comparison of the frequency response curves simulated by the NMS and the M-HBM<sup>[30]</sup>

为了揭示带冠叶片由颤振导致的极限环振动，Berthold 等将非线性模态分析与气弹分析相结合，发展了一种基于谐波平衡的自激振动频域极限环计算方法<sup>[85][86]</sup>。该方法克服了传统线性假设下的叶片气弹稳定性分析并未考虑接触、大变形等非线性环节对振型和频率的影响，因此无法预测极

限环振动带来的弊端。

在结构分析层面，采用了 EPMC 框架下定义的 dNNM 获取振型、摩擦阻尼比与振幅的关系；在气动分析层面，通过将气动影响系数矩阵在阻滞和分离状态下插值考虑接触对模态频率的影响，通过纳入与振幅相关的振型考虑非线性对模态振型的影响。以顺次耦合的方式评估气动力并带入结构的频域动力学方程进行迭代计算，即可获得颤振极限环振动。

该研究以含 60 个扇区的全周带冠叶片有限元模型为例，采用分布式的 3D 接触对，首次以数值仿真的方式再现了在试验中发现的极限环自激振动现象（图 15），揭示了在颤振分析中纳入非线性的重要意义。另一方面，该研究也凸显了非线性模态分析在航空发动机或燃气轮机工程研究中的价值，不仅可用于带冠叶片的稳态响应分析，还可以用于颤振分析。



### 6.2 缘板阻尼器

基于非线性模态分析可以显著提升干摩擦结构参数分析的效率，相关研究可见于缘板阻尼块的优化设计上。

孙业凯等<sup>[87]</sup>基于 EPMC 求解 dNNM，采用二维梁模型，对缘板阻尼器减振效果随伸根长度和接触角度等设计参数以及摩擦系数和基础刚度等界面参数的影响规律进行了数值分析。这项研究采用单点二维摩擦接触模型模拟界面的摩擦行为。该研究的目的在于初步论证非线性模态分析在缘板阻尼器设计中的可行性，因此，仅考虑了叶片的前两阶弯曲模态。

综合考虑缘板阻尼器对刚度和阻尼的影响，寻找了最优设计参数。在此基础上，结合拉丁超立方采样与蒙特卡洛模拟，以统计分析的手段揭

示了界面参数的分散性对阻尼效果的影响。研究表明界面参数的散度对缘板阻尼器性能的影响较小(图 16), 黄色区域代表阻尼比分布。

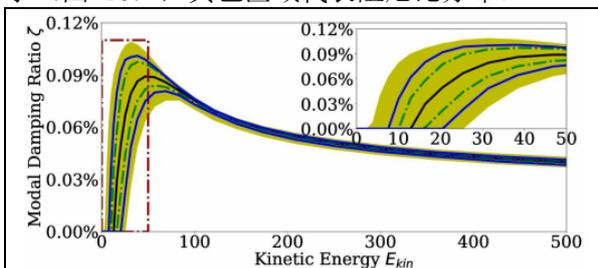


图16 考虑界面参数散度下的缘板阻尼器模态阻尼随系统能量变化曲线及其分散带<sup>[87]</sup>

Fig 16 Modal damping generated by the under-platform damper and its distribution versus kinetic energy considering the uncertainties of contact parameters<sup>[87]</sup>

Krack 等<sup>[88]</sup>提出了基于 EPMC 的缘板阻尼结构可靠性优化方法。其内核是通过非线性模态分析生成叶盘-缘板阻尼器结构的降维动力学模型。以上述降维动力学模型为基础, 即可通过非线性模态综合法计算响应。采用上述方法, 人们可以避免反复进行不同参数组合下频响曲线的非线性稳态响应计算, 从而节约计算资源。

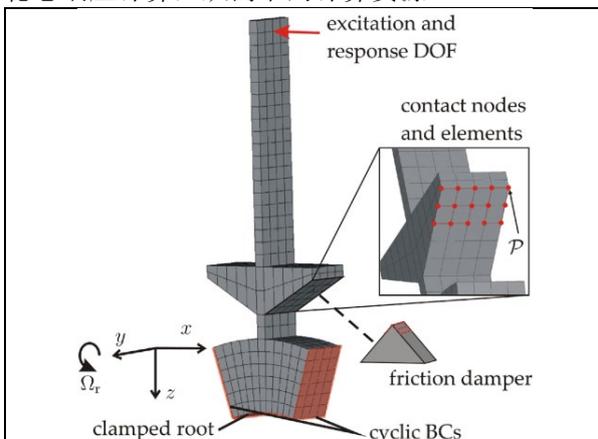


图17 Krack等采用的模拟叶盘-楔形缘板阻尼块有限元模型<sup>[88]</sup>

Fig 17 Finite element model of the dummy bladed disk and the wedge under-platform damper by Krack et al.<sup>[88]</sup>

该研究采用简化的谐调叶盘结构的有限元模型(图 17), 在缘板阻尼块的刚体假设下, 以分布式三维接触对模化摩擦界面的本构关系, 并采取周期减缩将模型降低到单扇区维度。在此基础上, 以质量(直接影响正压力)为设计变量, 以激振力水平、材料阻尼、摩擦系数为不确定变量, 以最大响应幅值小于目标幅值的概率为目标函数, 分析了在考虑参数不确定性的前提下, 实现减振目标的概率随设计参数的变化规律, 得到了名义参数下的最优设计点与考虑参数不确定性

的可靠性设计点不一致的结论(图 18)。

无论是孙业凯等的研究还是 M. Krack 等的研究, 都证明了以非线性模态为基础的参数分析方法可以显著提升在参数空间内大规模遍历分析时的效率, 在缘板阻尼结构的优化设计方面极具工程应用前景。但值得注意的, 由于继承自非线性模态, 上述方法均无法考虑非线性模态间的相互作用, 仅适用于单个非线性模态主导的工况。

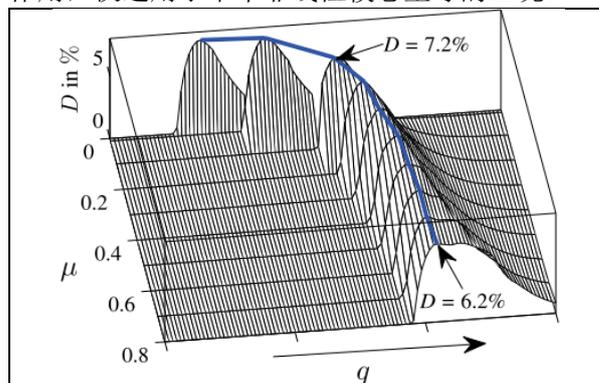


图18 不同摩擦系数下缘板阻尼器产生的模态阻尼比随振幅的变化<sup>[88]</sup>

Fig 18 The modal damping generated by under-platform dampers versus vibration amplitude curves for different friction coefficients<sup>[88]</sup>

### 6.3 叶根榫头阻尼

Laxalde 等<sup>[33]</sup>通过 CNM 计算考虑榫头阻尼叶片的 dNNM, 并且将接触界面的微动磨损的影响考虑进非线性模态分析。采用的三维有限元叶片模型如图 19 所示, 该模型的榫头处每侧有 24 个接触节点。该研究通过传统的 Craig-Bampton 固定界面模态综合法用来减缩模型的自由度数。以叶片的一阶弯曲模态为目标研究微动磨损对叶根榫头阻尼效果的影响。

Laxalde 等使用 Archard 磨损模型通过正压力以及滑动位移量确定磨损量。磨损量对摩擦系数的改变忽略不计, 将磨损量引入每一个振动周期的改变其初始间隙<sup>[89]</sup>。考虑到磨损周期远慢于振动周期, 将双时间尺度引入到非线性模态分析, 即在快时间尺度开展振动分析, 在慢时间尺度开展磨损分析<sup>[90]</sup>。因此, 在非线性模态分析过程中, dNNM 的模态共振频率和模态阻尼随着振动幅度以及磨损周期变化(图 20)。研究表明, 由于磨损的影响, 榫头干摩擦阻尼随着循环数的增加而减少。磨损率在大量循环后可能会产生突变, 引起叶片榫头提供的摩擦阻尼产生显著变化。

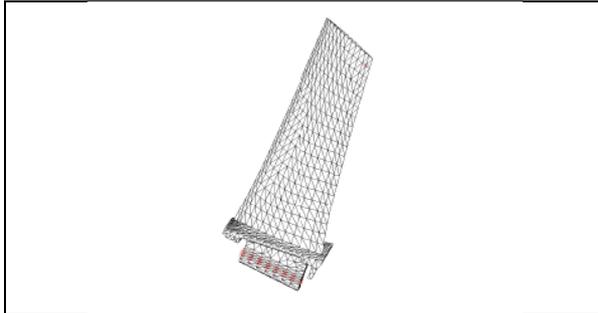


图19 Laxalde等采用的含叶根榫头阻尼的叶片有限元模型<sup>[33]</sup>

Fig.19 Finite element mode of the blade with blade root damping by Laxalde et al.<sup>[33]</sup>

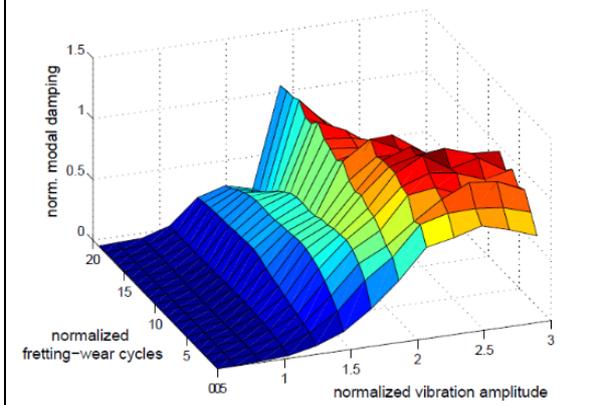
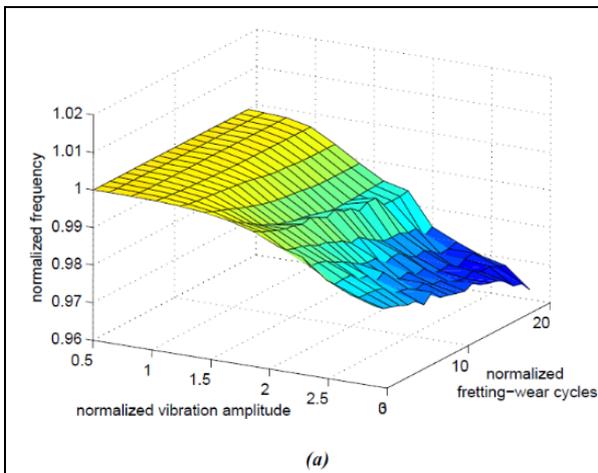


图20 磨损下考虑叶根阻尼叶片的共振频率/模态阻尼比随循环次数的演化<sup>[33]</sup>

Fig.20 Evolution of resonant frequency/ modal damping ratio with fretting-wear cycles for the blade considering root damping<sup>[33]</sup>

袁杰等<sup>[91]</sup>采用 EPMC 计算考虑榫头阻尼的风扇叶片的 dNNM, 并通过 NMS 重建非线性频响曲线。三维有限元叶片模型如图 21 所示, 该模型由一个含 27707 个节点的风扇叶片有限元模型和一个含 13826 个节点的轮盘扇区模型构成, 风扇叶片通过榫头安装到轮盘扇区模型的榫槽上。在榫头榫槽的摩擦接触面上共 208 个接触节点。

为了获得更好的计算效率, 袁杰等使用一种主动调节模态子空间的模型降阶方法, 将计算效率相比于传统的 Craig-Bampton 固定界面模态综合法提升了 120 倍<sup>[92]</sup>。

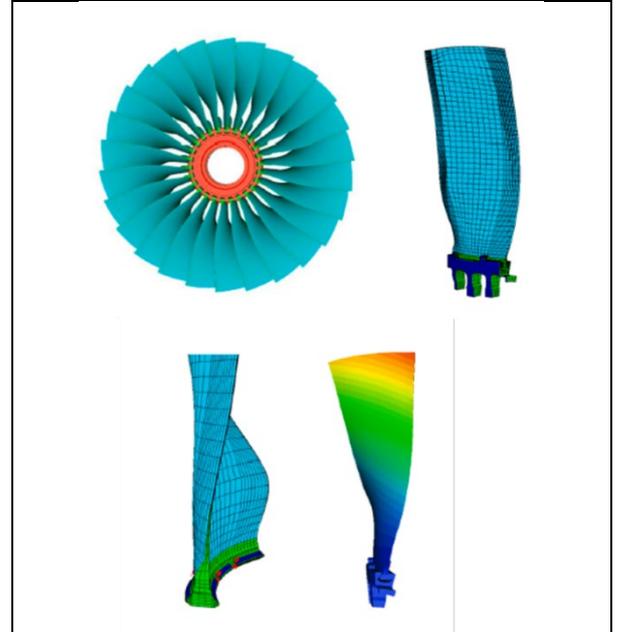


图21 袁杰等采用的纳入榫头榫槽接触的叶片-轮盘有限元模型<sup>[91]</sup>

Fig.21 Finite element model of the bladed disk considering the contact of blade root joints by YUAN et al.<sup>[91]</sup>

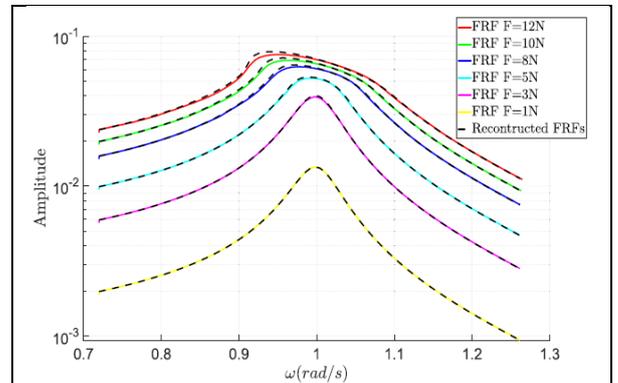


图22 不同激振水平下基于dNNM结合NMS和使用M-HBM直接计算得到的考虑叶根阻尼的叶片频响对比<sup>[91]</sup>

Fig.22 Comparison of the frequency response synthesized by dNNM combined with NMS and directly calculated by M-HBM at different excitation levels for the blade with root damping<sup>[91]</sup>

袁杰等通过 dNNM 和 NMS 重建了不同激振力下的频响曲线, 并与通过 M-HBM 直接计算得到频响曲线进行对比 (图 22)。研究表明, NMS 重建的非线性频响曲线在低激振力时与 M-HBM 直接计算得到频响曲线无明显差异。在高激振力时, 可以观察到通过 dNNM 与 NMS 重建的频响曲线在近共振点的位置大于通过 M-HBM

直接计算得到的频响曲线。对其可以解释为，在 dNNM 的计算过程已经纳入其余线性模态对于该 dNNM 的贡献。然而在 NMS 的过程中，是通过以 dNNM 为主模态并叠加其余线性模态作为修正。因此，在近共振点的位置，其余线性模态的贡献 NMS 中被重复考虑。

#### 6.4 整体叶盘-干摩擦阻尼环

Laxalde 等<sup>[28][33]</sup>基于 CNM 求解压气机整体叶盘-干摩擦阻尼环的 dNNM，以揭示不同摩擦系数对模态特性的影响。文章采用的单扇区三维有限元模型如图 23 所示，叶盘由 36 个扇区组成。其中，整体叶盘是由四面体网格建立，干摩擦阻尼环由三维梁单元建立。Laxalde 等使用周期减缩法，基于单扇区模型与周期循环边界条件模拟整圈叶盘。目标模态为四节径下的二阶弯曲模态，并且假设施加在阻尼环的正压力周向均匀分布。

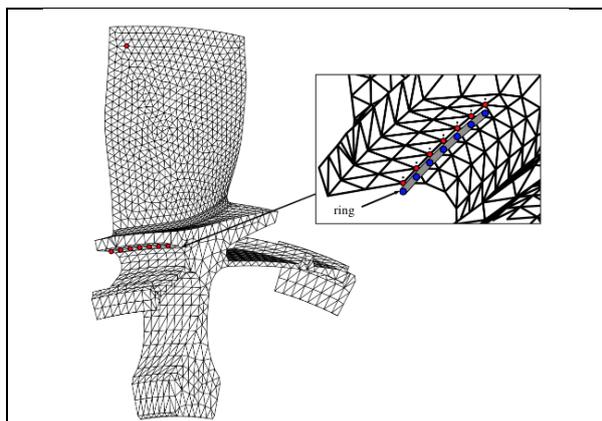


图23 Laxalde等采用的压气机整体叶盘-干摩擦阻尼环有限元模型<sup>[33]</sup>

Fig.23 Finite element model of the compressor blisk with a friction ring damper by Laxalde et al.<sup>[33]</sup>

非线性模态分析结果以共振频率/模态阻尼比随振幅变化曲线呈现，如图 24。首先，可以发现考虑不同摩擦系数 dNNM 呈现出不同大小的拐点振幅。即当振幅小于拐点振幅时，共振频率不会随着振幅的变化而变化，模态阻尼比维持在 0。当振幅大于拐点振幅时，共振频率开始随着振幅的增大减小，模态阻尼比开始快速增加然后逐步降低。摩擦系数越大，拐点振幅越大。在相同振幅下共振频率随着摩擦系数的增大而增大。最大模态阻尼比随着摩擦系数的增大而减小。

刘久周等<sup>[93]</sup>采用非线性复模态分析 CNM，基于集中参数模型，对整体叶盘-干摩擦阻尼环系统的模态特性进行了研究。其主要目的为定性对比干摩擦阻尼与压电同步开关阻尼机理的异同。

孙业凯等<sup>[94]-[96]</sup>基于 EPMC 求解模拟整体叶盘-干摩擦阻尼环的 dNNM，并以模态阻尼比作为

设计依据，对干摩擦阻尼环的界面以及周向形状进行几何优化。模拟整体叶盘-干摩擦阻尼环的三维有限元模型如图 25 所示，该整体叶盘由 30 个叶片组成，叶盘扇区包含 40320 个六面体网格，干摩擦阻尼环扇区包含 360 个六面体网格。孙业凯等采用三步模型减缩法，即第一步进行周期减缩，第二步使用传统的 Craig-Bampton 固定界面模态综合法减缩内部自由度，第三步使用部分界面模态降阶减缩在循环对称周期界面的节点<sup>[94]</sup>。

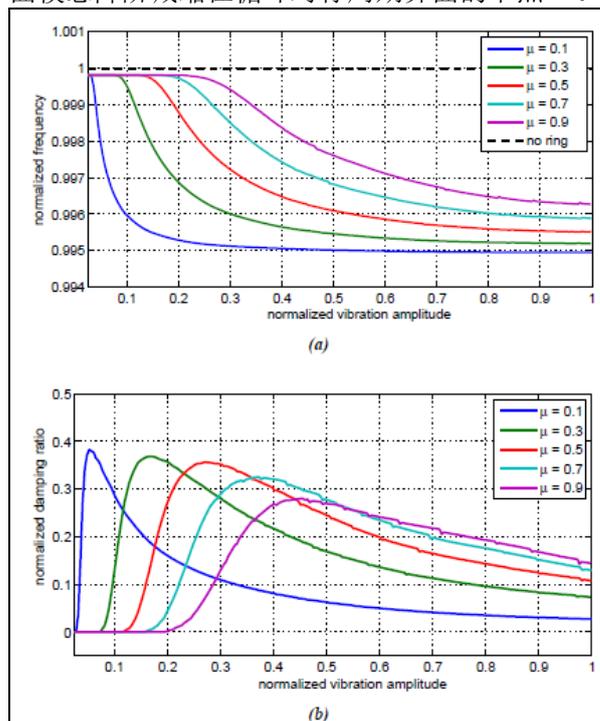


图24 不同摩擦系数下整体叶盘-干摩擦阻尼环模态频率（上）与阻尼比（下）随振幅的变化<sup>[33]</sup>

Fig.24 Modal frequency (top) and damping ratio (bottom) versus vibration amplitude for different friction coefficients<sup>[33]</sup>

为了对摩擦阻尼环进行几何设计，孙业凯等采用三个参数以控制摩擦阻尼环的上下表面的形状，并且自动更新网格。采用拉丁超立方方法在整个设计空间内采样作为样本，然后通过 EPMC 和 E-EBM 法获得各样本点的 dNNM，接着使用样本 dNNM 训练，建立克里金代理模型(Kriging meta-models)。最后通过已验证的克里金代理模型对整个几何设计空间进行搜索，通过共振频率/模态阻尼比随振幅变化曲线获得阻尼比最大的几何形状（图 26）。最优后的几何形状如图 25 所示，几何优化使得摩擦阻尼环的最大模态阻尼比增大两倍，共振峰值下降 50%。

摩擦阻尼器考虑非线性特征的几何设计是非常耗时耗力。现有设计方法往往依赖于线性动力学分析或者非线性稳态响应分析。通过克里金代理模型预测 dNNM 可以为未来摩擦阻尼器的几何设计提供更精确且经济的仿真模拟方法。

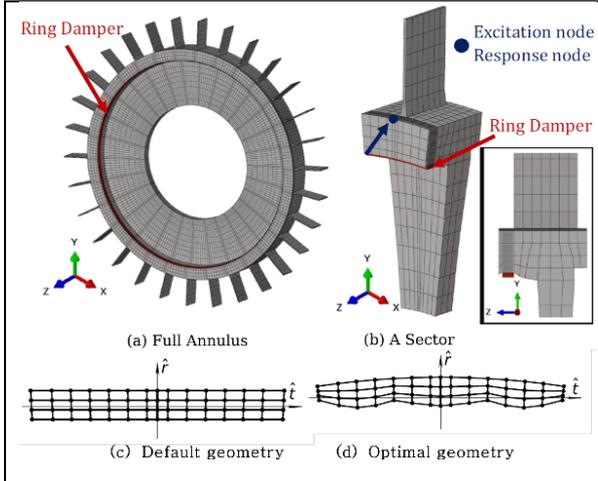


图25 孙业凯等采用的模拟整体叶盘-干摩擦阻尼环有限元模型<sup>[96]</sup>

Fig.25 The dummy blisk with friction ring damper finite element model by SUN et al.<sup>[96]</sup>

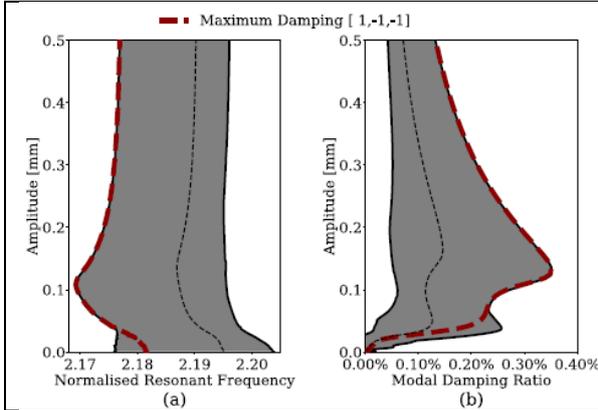


图26 几何设计空间内整体叶盘-阻尼环系统的共振频率/模态阻尼比随振幅的变化<sup>[96]</sup>

Fig.26 Modal frequency and damping ratio versus vibration amplitude of the blisk-friction ring damper system in the whole design space of geometry parameters<sup>[96]</sup>.

将压电材料铺设到干摩擦阻尼环上，形成干摩擦-压电复合阻尼环，是一种进一步提升阻尼器性能，以满足整体叶盘的变工况振动控制需求的新思路。北航的吴亚光等<sup>[97]</sup>采用非线性复模态的分析方法，分别基于集中参数模型和有限元模型（图 27），对干摩擦-压电复合阻尼环的可行性进行了深入的分析。

其核心思想是基于压电材料的正机电耦合效应，使存储在阻尼环中的应变能可以通过压电分支阻抗进一步耗散。结合电路参数的可调性与干摩擦阻尼结构的可靠性，复合阻尼环的总输出阻尼和工况适应性均得到了提高（图 28）。一个潜在的应用场景是当航空发动机转速变化时，阻尼环上的正压力偏离设计值，可以通过根据运行状态对压电阻抗和干摩擦进行匹配。

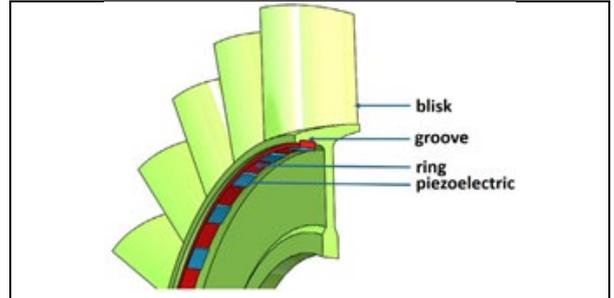


图27 吴亚光等采用的整体叶盘-压电/干摩擦复合阻尼环模型<sup>[97]</sup>

Fig.27 The blisk with a piezo/friction hybrid ring damper model by WU et al.<sup>[97]</sup>

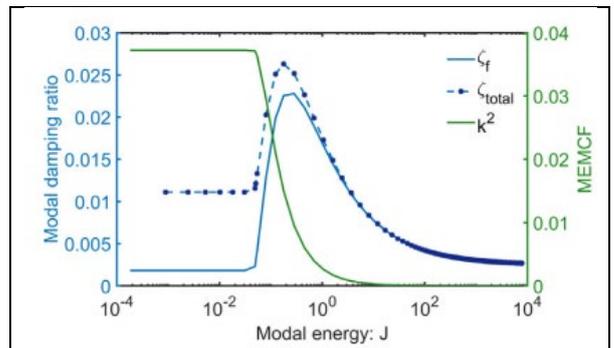


图28 通过CNM获得的复合阻尼环产生的阻尼比与非线性模态机电耦合系数<sup>[97]</sup>

Fig.28 Modal damping ratio and nonlinear modal electro-mechanical coupling factor generated by the hybrid ring damper through CNM<sup>[97]</sup>

由于非线性的存在，这两种阻尼相互作用，不能直接叠加来评估总输出阻尼。为了满足这一需求，吴亚光等<sup>[98]</sup>将机电耦合理论扩展到非线性框架，定义了非线性模态机电耦合系数，并发展了基于非线性模态的分析设计方法，实现了复合阻尼环减振性能的快速评估。该方法通过稳态响应进行了验证。

在有限元模型的分析中，采用了六面体实体单元对整体叶盘和阻尼环进行了建模，采用多场耦合实体单元对压电材料建模。采用了可变正压力的二维分布式接触模型描述界面本构。为了提升计算效率，采用了非线性周期减缩方法，将模型降低到单扇区维度。为了提升牛顿迭代时算法的收敛性，还给出了解析形式的雅各比矩阵。研究表明，复合阻尼环可以使最优减振效果提升30%，使有效工作范围拓宽 2.6 倍。这种模块化的设计也使得更便于更换和维护。

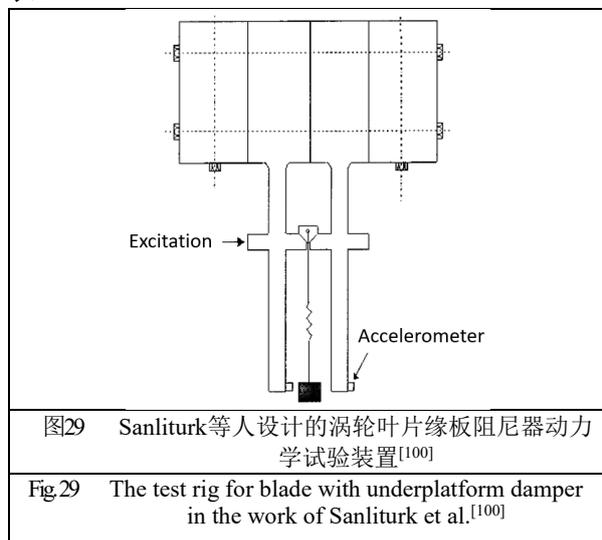
## 7 阻尼非线性模态的试验研究

含干摩擦阻尼的航空发动机结构属于广义非线性结构的一种特殊类型，此类结构的动力学试验方法及研究进展可以从两个类别去归纳：一类

是频响函数试验方法，这类试验方法通常对结构施加多幅值的激励力，测得结构多条畸变的频响函数曲线。在此基础上，利用曲线拟合的方法辨识结构的非线性模态参数；另一类是纯模态试验方法，可直接得到非线性模态的参数。这两类方法在航空发动机部件干摩擦阻尼结构的试验中均有报道。

## 7.1 频响试验方法

频响函数试验方法的一大优势是可以利用现有的、较为成熟的线性结构动力学测试的硬件和振动控制系统开展非线性结构的试验。最早的试验研究可以追溯到 Setio 等人<sup>[99]</sup> 对一端有非线性连接结构的梁开展模态参数辨识的试验，他们通过拟合试验测得的非线性频响函数，得到了结构的非线性模态频率与振型随着激励幅值的变化关系。此后，Sanliturk 等<sup>[100]</sup> 在设计了简易涡轮叶片缘板阻尼器试验装置（如图 29 所示），通过施加不同幅值的步进式正弦扫频激励，获得了结构在同相和异相两阶弯曲模态附近的非线性频响函数，并且将试验结果与采用分析模型得到的预示结果进行了对比，验证了分析模型的有效性。然而，频响函数试验方法往往依赖于对系统施加多幅值的激励力，需要开展多次扫频试验，耗时较长。



## 7.2 纯模态试验方法

所谓的纯模态，就是指通过单点或者多点的适调力使得非线性结构一直处于共振状态，从而直接获得结构的模态参数。这类试验方法具有较好的信噪比与可信度，因而在大型线性航空航天结构的动力学试验中取得了广泛的应用。然而，对于非线性结构而言，开展纯模态试验颇具挑战。

非线性系统的纯模态试验最早由 Peeters 等人报道<sup>[101]</sup>。在实验中，采用手动调节激振力频率的方式，使得激振力的相位与结构上单点加速度

响应的相位始终相差  $90^\circ$ ，这个相差又被称为非线性结构相位共振的相差条件。此后，该手动调节的过程逐渐被自动调节的控制技术所取代，例如锁相环控制技术、基于控制的连续方法、共振峰追踪技术等。

Schwarz 等<sup>[102]</sup> 在德国 MTU 航空发动机公司的资助下搭建了叶根榫头动力学试验装置，并对试验系统进行纯模态试验。该装置在榫槽结构上施加基础激励并测量激振力信号，通过激光多普勒测振仪测量叶尖的振动速度信号，再利用锁相环技术控制激振力与速度的相位差始终为零，从而满足相位共振条件。试验中通过不断提高激振力的大小，直接获得了系统的非线性模态频率与阻尼比随着激振力的变化曲线。

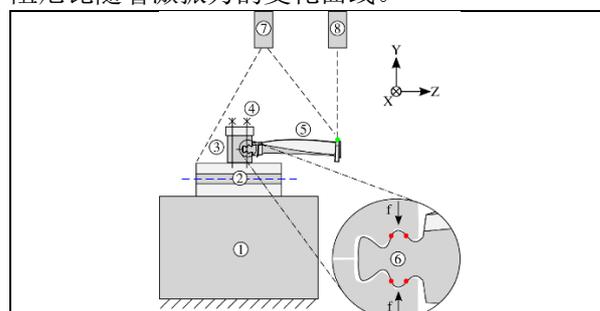


图30 Schwarz等人开展的涡轮叶片叶根榫头动力学试验装置<sup>[102]</sup>

Fig.30 The test rig for turbine blade in the work of Schwarz et al.<sup>[102]</sup>

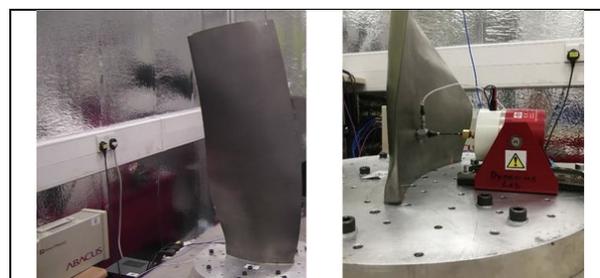


图31 王兴等人开展的风扇叶片全场模态试验<sup>[103]</sup>

Fig.31 Full-field nonlinear modal test for fan blade by WANG et al.<sup>[103]</sup>

除此之外，非线性结构的模态振型预示着应力的分布，具有较大的工程价值，其测量一直是个难点。一方面因为传统的接触式传感器会改变结构的动态特性，而新型非接触式测量系统往往需要专门的测试流程。另一方面，非线性模态的振型含有多个谐波的分量，需要专门的数据处理方法才能够高精度地估计其各分量的幅值。近期，王兴等人<sup>[103]</sup> 通过共振峰追踪技术对发动机风扇叶片开展了纯模态试验，通过三维激光多普勒测振仪测量了风扇叶片在大幅非线性振动状态下的全场动力学响应。在此基础上，利用提出的多步插值傅里叶分析方法对响应数据的各个谐波分量进行了估计，获得了风扇叶片非线性模态的多谐

波振型。

## 8 未来研究方向

虽然基于非线性模态的干摩擦阻尼结构分析与设计方法在近十年里取得了重要进展,也逐渐获得了工业界的认可,但是作者认为,还存在以下亟待解决的问题:

1) 当采用非线性模态分析干摩擦系统的稳态响应时,无论是拓展能量平衡法还是非线性模态综合法,均基于单模态假设。但是,叶盘结构具有模态密集的特征,延用单模态振动的假设过强。因此,对于以“模态算响应的技术路线”,需要发展相应的方法使得能够处理存在多个非线性模态相互作用的情况。

2) 在基于非线性模态对叶片/叶盘干摩擦阻尼结构的分析方面,多在“名义条件”下开展,但是实际情况下,无论是界面温度还是界面力学参数,“服役条件”下都会随着时间而演化,叶盘各扇区的参数也会存在失谐。因此,纳入“服役条件”的影响也将是未来的研究重点之一。

3) 在非线性模态的试验方面,现有研究多基于简单结构,且均在实验室条件下开展。因此,建立适用于航空发动机叶盘结构的非线性模态试验方法是进一步推动非线性模态从理论到工程应用的关键。

## 9 结论

本文重点综述了近十余年来非线性模态应用于叶片/叶盘干摩擦阻尼结构分析与设计的研究进展,得到的主要结论如下:

1) 随着非线性模态理论与数值方法的发展,非线性模态不仅适用于守恒非线性系统,学术界提出的阻尼非线性模态同样适用于包括干摩擦在内的非光滑非守恒非线性系统;

2) 存在两种表征阻尼非线性模态的方式,分别是非线性复模态概念于拓展周期运动概念,均可通过多阶谐波平衡法求解;

3) 非线性模态综合法与拓展能量平衡法建立了干摩擦系统的非线性模态与稳态强迫响应之间的桥梁,相较于传统的强迫响应分析方法,上述方法可以显著提升参数分析时的计算效率;

4) 针对干摩擦阻尼结构,基于非线性模态的分析方法已经从机理研究段发展到了工程研究,从定性研究发展到了定量研究,从集中参数模型发展到了高保真有限元模型,从单点一维接触发展到了多点分布式三维接触;

5) 目前,国内外学者已经基于非线性模态对叶片/叶盘干摩擦阻尼结构的动力学性能开展了分析与设计工作,结构形式涉及叶冠、缘板阻尼器、叶根、阻尼环等,研究目标包括参数优化、

几何设计、鲁棒性设计、气弹稳定性分析、新型复合阻尼器设计等;

6) 干摩擦阻尼结构试验研究的发展主要有两个方面:一方面,由于多幅值激励下的结构频响函数物理意义明确,其试验结果广受认可,但是试验过程耗时较长,测试效率较低,需进一步发展快速试验的技术。二是纯模态试验方法信噪比高,但是当前相关技术仍然不成熟,面向实际复杂结构的动力学试验报道非常稀少,尚在研究的起步阶段,需进一步完善;

7) 未来潜在的研究方向可归纳为三方面:①进一步完善基于非线性模态的稳态响应评估方法,破除单模态假设;②以叶片/叶盘干摩擦阻尼结构的“动态”设计为出发点,形成可考虑“服役条件”的非线性模态分析方法;③将非线性模态试验的适用方法从简单结构拓展到航空发动机叶片/叶盘及其干摩擦阻尼结构。

## 参考文献:

- [1] 李其汉,王延荣,王建军. 航空发动机叶片高循环疲劳失效研究[J]. 航空发动机, 2003(4):16-1841.  
LI Qihan, WANG Yanrong, WANG Jianjun. Investigation of high cycle fatigue failures for the aero engine blades[J]. Aeroengines, 2003, (4):16-1841 (in Chinese).
- [2] 洪杰,刘书国,张大义等. 小型短寿命涡扇发动机涡轮叶片疲劳失效分析[J]. 航空动力学报, 2012, 27(3):604-609.  
HONG Jie, LIU Guoshu, ZHANG Dayi, et al. Fatigue failure analysis of turbine blade in miniature short-life turbofan engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(3):604-609 (in Chinese).
- [3] BARTSCH T M. Cycle Fatigue(HCF) Science and Technology Program 2002 Annual Report [EB/OL]. [2014-04-01].  
<http://www.pr.af.mil/divisions/prt/hcf/2002report/>.
- [4] KRACK M, SALLES L, THOUVEREZ F. Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints[J]. Archives of Computational Methods in Engineering, 2016, 24: 589-636.
- [5] PESARESI L, ARMAND J, SCHWINGSHACKL C, et al. An advanced underplatform damper modelling approach based on a microslip contact model[J]. Journal of Sound and Vibration, 2018, 436: 327-340.
- [6] PESARESI L, SALLES L, JONES A, et al. Modelling the nonlinear behaviour of an underplatform damper test rig for turbine applications[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 85: 662-679.
- [7] DENIMAL E, EL HADDAD F, WONG C, et al. Topological optimization of under-platform dampers with moving morphable components and global optimization algorithm for nonlinear frequency response[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2021, 143(2):

- 021021.
- [8] YUAN Ye, JONES A, SETCHFIELD R, et al. Robust design optimisation of underplatform dampers for turbine applications using a surrogate model[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2021, 494:115528.
- [9] PANNING L, SEXTRO W, POPPK. Optimization of the contact geometry between turbine blades and underplatform dampers with respect to friction damping [C]//Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 4. Amsterdam, The Netherlands: ASME, 2002: 991-1002.
- [10] PANNING L, SEXTRO W, POPPK. Optimization of interblade friction damper design[C]//Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 4. Munich, Germany: ASME, 2000.
- [11] GASTALDI C, GOLLA M M. Pre-optimization of asymmetrical underplatform dampers[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2016, 139(1): 012504.
- [12] GASTALDI C, BERRUTI T M, GOLLA M M. Best practices for underplatform damper designers[J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2018, 232(7): 1221-1235.
- [13] LAXALDE D, THOUVEREZ F, LOMBARD J P. Forced response analysis of integrally bladed disks with friction ring dampers[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2010, 132(1): 011013.
- [14] LAXALDE D, GIBERT C, THOUVEREZ F. Experimental and numerical investigations of friction rings damping of blisks[C]//Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 5. Berlin, Germany: ASME, 2008: 469-479.
- [15] LUPINI A, EPUREANU B I. A friction-enhanced tuned ring damper for bladed disks[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2020, 143(1): 011002.
- [16] 陈璐璐, 马艳红, 杨鑫, 洪杰. 带干摩擦阻尼结构叶片振动响应试验[J]. *航空动力学报*, 2008, 23(9):1647-1653.  
CHEN Lulu, MA Yanhong, YANG Xin, et al. Experiment of vibration and response of blade with dry friction structure[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2008, 23(9):1647-1653 (in Chinese).
- [17] 李迪, 洪杰, 陈璐璐. 带冠涡轮叶片干摩擦阻尼减振试验研究[J]. *燃气涡轮试验与研究*, 2008, 21(4):22-27.  
LI Di, HONG Jie, CHEN Lulu. Experiment of dry friction damping effect of shrouded turbine blade[J]. *Gas Turbine Experiment and Research*, 2008, 21(4):22-27 (in Chinese).
- [18] 李琳, 刘久周, 李超. 干摩擦阻尼器对宽频多阶次激励减振效果分析[J]. *航空动力学报*, 2016, 31(9):2171-2180.  
LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Analysis on damping effect of dry friction damper under wideband multi-harmonic excitation[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2016, 31(9):2171-2180 (in Chinese).
- [19] 高钱, 李琳, 吴亚光, 范雨. 考虑盘片耦合的缘板阻尼器减振性能分析方法[J]. *推进技术*:1-20[2022-04-28].<http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1813.V.20211222.1216.004.html>.  
GAO Qian, LI Lin, WU Yaguang, and FAN Yu. On the vibration reduction performance of underplatform dampers considering blade-disk coupling[J]. *Journal of Propulsion and Technology*: 1-20[2022-04-28]. <http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1813.V.20211222.1216.004.html>. (in Chinese).
- [20] 李琳, 高钱, 吴亚光, 范雨. 考虑参数关联的缘板阻尼器减振性能分析[J]. *航空动力学*, 2021,36(08):1657-1668.  
LI Lin, GAO Qian, WU Yaguang, and FAN Yu. On the vibration reduction performance of underplatform dampers considering parameter correlation. *Journal of Aerospace Power*, 2021, 36(08): 1657-1668. (in Chinese).
- [21] 马皓晔, 李琳, 范雨, 吴亚光. 基于加速动态拉格朗日法的摩擦片阻尼分析[J]. *航空学报*, 2019,40(12):121-133.  
MA Haoye, LI Lin, FAN Yu, and WU Yaguang. Damping performance analysis of friction patches using an accelerated dynamic Lagrange method[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2019, 40(12): 223283. (in Chinese).
- [22] ZHANG Dayi, GAO Bin, HONG Jie, et al. Experimental investigation on dynamic response of flat blades with underplatform dampers[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2019, 32(12): 2667-2678.
- [23] 漆文凯, 高德平. 带摩擦阻尼器系统振动响应分析方法研究[J]. *航空动力学报*, 2006, 21(1):161-167.  
QI Wenkai, GAO Deping. Study of vibration response analysis method for the dry friction damping systems[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2006, 21(1):161-167 (in Chinese).
- [24] 谢永慧, 张荻. 带摩擦阻尼器长叶片振动特性优化研究[J]. *机械强度*, 2007, 29(4):548-552.  
XIE Yonghui, ZHANG Di. Numerical model and optimization for dynamic characteristic of long blade with friction damper[J]. *Journal of Mechanical Strength*, 2007, 29(4):548-552 (in Chinese).
- [25] 徐自力, 常东锋, 刘雅琳. 基于微滑移解析模型的干摩擦阻尼器叶片稳态响应分析[J]. *振动工程学报*, 2008, 21(5):505-510.  
XU Zili, CHANG Dongfeng, LIU Yalin. Forced response analysis of blade system with dry friction damper using one-bar microslip analytic model[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2008, 21(5):505-510 (in Chinese).
- [26] 张欢, 李光辉, 梁恩波. 一种摩擦阻尼器在整体叶盘结构的应用[J]. *航空动力学报*, 2017, 32(4):800-807.  
ZHANG Huan, LI Guanghui, LIANG Enbo. Application of a friction damper in blisk structure[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2017, 32(4):800-807 (in Chinese).
- [27] 李琳, 刘久周, 李超. 航空发动机中的干摩擦阻尼器

- 及其设计技术研究进展[J]. 航空动力学报, 2016, 31(10):2305-2317.
- LI Lin, LIU Jiuzhou, LI Chao. Review of the dry friction dampers in aero-engine and their design technologies[J]. Journal of Aerospace Power, 2016, 31(10):2305-2317 (in Chinese).
- [28] LAXALDE D, THOUVEREZ F. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems: Application to turbomachinery bladings with friction interfaces[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322(4): 1009-1025.
- [29] KRACK M. Nonlinear modal analysis of nonconservative systems: Extension of the periodic motion concept[J]. Computers & Structures, 2015, 154: 59-71.
- [30] KRACK M, PANNING L, WALLASCHEK J. A method for nonlinear modal analysis and synthesis: Application to harmonically forced and self-excited mechanical systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(25): 6798-6814.
- [31] SUN Yekai, VIZZACCARO A, YUAN Jie, et al. An extended energy balance method for resonance prediction in forced response of systems with non-conservative nonlinearities using damped nonlinear normal mode[J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103: 3315-3333.
- [32] JOANNIN C, CHOUVION B, THOUVEREZ F, et al. A nonlinear component mode synthesis method for the computation of steady-state vibrations in non-conservative systems[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2017, 83: 75-92.
- [33] LAXALDE D, SALLES L, BLANC L, et al. Non-linear modal analysis for bladed disks with friction contact interfaces[C]//Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 5. Berlin, Germany: ASME, 2008: pp. 457-467.
- [34] KRACK M, PANNING L, WALLASCHEK J, et al. Reduced order modeling based on complex nonlinear modal analysis and its application to bladed disks with shroud contact[J]. Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, 2013, 135(10): 102502.
- [35] SARROUY E: Phase driven modal synthesis for forced response evaluation[C]//In: 7 th International Conference on Nonlinear Vibrations, Localization and Energy Transfer. Marseille, France, 2019.
- [36] ROSENBERG R M. Normal modes of nonlinear dual-mode systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1960, 27(2): 263-268.
- [37] RAND R H. A higher order approximation for non-linear normal modes in two degree of freedom systems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1971, 6(4): 545-547.
- [38] RAND R H. A direct method for non-linear normal modes[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1974, 9(5): 363-368.
- [39] SZEMPLINSKA-STUPNICKA W. Non-linear normal modes and the generalized ritz method in the problems of vibrations of non-linear elastic continuous systems[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 18(2):149-165.
- [40] 刘济科, 赵令诚, 方同. 非线性系统模态分叉与模态局部化现象[J]. 力学学报, 1995, 27(5):614-618.
- LIU Jike, ZHAO Lingcheng, FANG Tong. Bifurcation and localization phenomena of nonlinear modes in a non-linear system. Acta Mechanica Sinica, 1995, 27(5):614-618 (in Chinese).
- [41] VAKAKIS A F. Non-linear normal modes (nnms) and their applications in vibration theory: An overview[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 1997, 11(1): 3-22.
- [42] 徐健学, 蒋耀林, 江俊, 张新华. 非线性科学的研究主流综述[J]. 飞行力学, 1996, 14(1):17-2235.
- XU Jianxue, JIANG Yaolin, JIANG Jun, et al. A summary of the main trends of nonlinear science[J]. Flight Dynamics, 1996, 14(1):17-2235 (in Chinese).
- [43] MIKHLIN Y V, AVRAMOV. K V. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems: review of theoretical developments[J]. Applied Mechanics Reviews, 2010, 63(6): 060802.
- [44] 李欣业, 陈予恕, 吴志强等. 多自由度内共振系统非线性模态的分岔特性[J]. 力学学报, 2002, 34(3):401-407.
- LI Xinye, CHEN Yushu, WU Zhiqiang, et al. Bifurcation of nonlinear normal modes of multi-degree-of-freedom systems within internal resonance[J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(3):401-407 (in Chinese).
- [45] PEETERS M, VIGUIE R, SERANDOUR G, et al. Nonlinear normal modes, part ii: Toward a practical computation using numerical continuation techniques[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2009, 23(1): 195-216.
- [46] KRYLOV N, BOGOLIUBOV N: Introduction to Non-linear Mechanics[M]. Annals of mathematics studies. no.11. Princeton University Press,1943.
- [47] SHAW S W, PIERRE C. Non-linear normal modes and invariant manifolds[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 150(1): 170-173.
- [48] SHAW S W, PIERRE C. Normal modes for non-linear vibratory systems[J]. Journal of Sound and Vibration, 1993, 150: 40.
- [49] HALLER G, PONSIOEN S. Nonlinear normal modes and spectral submanifolds: existence, uniqueness and use in model reduction[J]. Nonlinear Dynamics, 2016, 86(3): 1493-1534.
- [50] GENDELMAN O, MANEVITCH L, VAKAKIS A, et al. A degenerate bifurcation structure in the dynamics of coupled oscillators with essential stiffness nonlinearities[J]. Nonlinear Dynamics, 2003, 33(1): 1-10.
- [51] JEZEQUEL L, LAMARQUE C. Analysis of non-linear dynamical systems by the normal form theory[J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 149(3): 429-459.

- [52] TOUZE C: Normal form theory and nonlinear normal modes: theoretical settings and applications[C]//In: G. Kerschen (ed.) *Modal Analysis of nonlinear Mechanical Systems*, Volume 555, New York, US: Springer, 2014: 75-160.
- [53] NAYFEH A H. On direct methods for constructing nonlinear normal modes of continuous systems[J]. *Journal of Vibration and Control*, 1995, 1(4): 389-430.
- [54] 陈予恕, 吴志强. 非线性模态理论的研究进展[J]. *力学进展*, 1997, 27(3):289-300.  
CHEN Yushu, WU Zhiqiang. Advances in study on theories of nonlinear normal modes[J]. *Advances in Mechanics*, 1997, 27(3):289-300 (in Chinese).
- [55] 李欣业, 陈予恕, 吴志强. 非线性模态理论及其研究进展[J]. *河北工业大学学报*, 2004, 33(4):19-26.  
LI Xinye, CHEN Yushu, WU Zhiqiang. The theory of nonlinear normal modes and its advance[J]. *Journal of Hebei University of Technology*, 2004, 33(4):19-26 (in Chinese).
- [56] RENSON L, KERSCHEN G, COCHELIN B. Numerical computation of nonlinear normal modes in mechanical engineering[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2016, 364: 177-206.
- [57] JAHN M, TATZKO S, PANNING L, et al. Comparison of different harmonic balance based methodologies for computation of nonlinear modes of non-conservative mechanical systems[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 127: 159-171.
- [58] SUN Yekai, YUAN Jie, VIZZACCARO A, et al. Comparison of different methodologies for the computation of damped nonlinear normal modes and resonance prediction of systems with non-conservative nonlinearities[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, 104: 3077-3107.
- [59] YU Pingchao, MA Yanhong, HONG J, et al. Application of complex nonlinear modes to determine dry whip motion in a rubbing rotor system[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2021, 34(1): 209-225.
- [60] DOKAINISH M A, SUBBARAJ K. A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-i. explicit methods[J]. *Computers & Structures*, 1989, 32(6): 1371-1386.
- [61] DOEDEL E, CHAMPNEYS A, FAIRGRIEVE T, et al. *Auto 97: Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations (with homcont)*, 1999.
- [62] AL-QASSAB M, NAIR S. Wavelet-galerkin method for free vibrations of elastic cable[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2003, 129(3): 350-357.
- [63] ASCHER U, CHRISTIANSEN J, RUSSELL R D. A collocation solver for mixed order systems of boundary value problems[J]. *Mathematics of Computation*, 1979, pp. 659-679.
- [64] DANKOWICZ H, SCHILDER F. An extended continuation problem for bifurcation analysis in the presence of constraints[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2011, 6(3).
- [65] CAMERON T M, GRIFFIN J H. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1989, 56(1): 149-154.
- [66] ALLGOWER E L, GEORG K. *Introduction to Numerical Continuation Methods*[J]. *Classics in Applied Mathematics*, 2003, 45: xxvi-388.
- [67] SALLES L, STAPLES B, HOFFMANN N, et al. Continuation techniques for analysis of whole aeroengine dynamics with imperfect bifurcations and isolated solutions[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2016, 86(3): 1897-1911.
- [68] COCHELIN B, DAMIL N, POTIER-FERRY M. Asymptotic-numerical methods and pade approximants for non-linear elastic structures[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1994, 37(7): 1187-1213.
- [69] WOIWODE L, BALAJI N N, KAPPAUF J, et al. Comparison of two algorithms for harmonic balance and path continuation[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2020, 136: 106503.
- [70] GRIFFIN J H. Friction damping of resonant stresses in gas turbine engine airfoils[J]. *Journal of Engineering for Power*, 1980, 102(2): 329-333.
- [71] YANG B D, CHU M L, MENQ C H. Stick-slip-separation analysis and non-linear stiffness and damping characterization of friction contacts having variable normal load[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 210(4): 461-481.
- [72] YANG B D, MENQ C H. Characterization of 3d contact kinematics and prediction of resonant response of structures having 3d frictional constraint[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1998, 217(5): 909-925.
- [73] IWAN W D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1966, 33(4): 893.
- [74] DAHL P R. Solid friction damping of mechanical vibrations[J]. *AIAA Journal*, 1976, 14(12): 1675-1682.
- [75] CANUDAS DE WIT C, OLSSON H, ASTROM P K et al. A new model for control of systems with friction[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(3): 419-425.
- [76] BOUC R. A mathematical model for hysteresis[J]. *Acustica*, 1971, 24(1): 16-25.
- [77] WEN Y K. Method for random vibration of hysteretic systems[J]. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, 1976, 102(2): 249-263.
- [78] VALANIS K C. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: Plasticity as a limit of the endochronic theory[J]. *Archives of Mechanics*, 1980, 32: 171-191.
- [79] WU Yaguang, LI Lin, FAN Yu, et al. Design of wave-like dry friction and piezoelectric hybrid dampers for thin-walled structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*,

- 2020, 493: 115821.
- [80] KERSCHEN G, KOWTKO J J, MCFARLAND D M, et al. Theoretical and experimental study of multimodal targeted energy transfer in a system of coupled oscillators[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2007, 47: 285-309. Special Issue: Non-linear Structural Dynamics.
- [81] VAKAKIS A F. Inducing passive nonlinear energy sinks in vibrating systems[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2001, 123(3): 324-332.
- [82] HILL T, CAMMARANO A, NEILD S, et al. Interpreting the forced responses of a two-degree-of-freedom nonlinear oscillator using backbone curves[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 349: 276-288.
- [83] HONG Dongxiao, HILL T, NEILD S. Efficient energy balancing across multiple harmonics of nonlinear normal modes[J]. *Non-linear Dynamics*, 2022.
- [84] CENEDESE M, HALLER G. How do conservative backbone curves perturb into forced responses?: A Melnikov function analysis[J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2020, 476(2234): 20190494.
- [85] BERTHOLD C, GROSS J, FREY C, et al. Analysis of friction-saturated flutter vibrations with a fully-coupled frequency domain method[C]//Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air, Volume 10A. Virtual, Online: ASME, 2020.
- [86] BERTHOLD C, GROSS J, FREY C, et al. Development of a fully-coupled harmonic balance method and a refined energy method for the computation of flutter-induced limit cycle oscillations of bladed disks with nonlinear friction contacts [J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2021, 102: 103233.
- [87] SUN Yekai, YUAN Jie, PESARESI L, et al. Parametric study and uncertainty quantification of the nonlinear modal properties of frictional dampers[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2020, 142(5): 051102.
- [88] KRACK M, TATZKO S, PANNING L, et al. Reliability optimization of friction-damped systems using nonlinear modes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 333(13): 2699-2712.
- [89] SALLES L, BLANC L, THOUVEREZ F, et al. Dynamic analysis of fretting-wear in friction contact interfaces[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2009, 132(1): 012503.
- [90] SALLES L, BLANC L, THOUVEREZ F, et al. Dual time stepping algorithms with the high order harmonic balance method for contact interfaces with fretting-wear[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2012, 134(3): 032503.
- [91] YUAN Jie, SUN Yekai, SCHWINGSHACKL C, et al. Computation of damped nonlinear normal modes for large scale nonlinear systems in a self-adaptive modal subspace[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 162: 108082.
- [92] YUAN Jie, SALLES L, HADDAD F E, et al. An adaptive component mode synthesis method for dynamic analysis of jointed structure with contact friction interfaces[J]. *Computers & Structures*, 2020, 229: 106177.
- [93] LIU Jiuzhou, LI Lin, FAN Yu. A comparison between the friction and piezoelectric synchronized switch dampers for blisks[J]. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2018, 29(12): 2693-2705.
- [94] SUN Yekai, YUAN Jie, DENIMAL E, et al. Nonlinear modal analysis of frictional ring damper for compressor blisk[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2021, 143(3): 031008.
- [95] SUN Yekai, YUAN Jie, DENIMAL E, et al. A study of the contact interface for compressor blisks with ring dampers using nonlinear modal analysis[J]. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2021, 1081: 012041.
- [96] SUN Yekai, DENIMAL E, YUAN Jie, et al. Geometric design of friction ring dampers in blisks using nonlinear modal analysis and kriging surrogate model[J]. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2022, 65: 98.
- [97] WU Yaguang, LI Lin, FAN Yu, et al. Design of dry friction and piezoelectric hybrid ring dampers for integrally bladed disks based on complex nonlinear modes[J]. *Computers & Structures*, 2020, 233: 106237.
- [98] WU Yaguang, LI Lin, FAN Yu. Nonlinear modal electro-mechanical coupling factor for piezoelectric structures containing nonlinearities[J]. *Chinese Journal of Aeronautics*, 2022.
- [99] SETIO S, SETIO H D, JEZEQUEL L. A method of nonlinear modal identification from frequency response tests[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1992, 158(3):497-515.
- [100] SANLITURK K Y, EWINS D J, STANBRIDGE A B. Underplatform dampers for turbine blades: Theoretical modeling, analysis, and comparison with experimental data[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 1998, 123(4): 919-929.
- [101] PEETERS M, KERSCHEN G, GOLINVAL J C. Dynamic testing of nonlinear vibrating structures using nonlinear normal modes[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2011, 330(3):486-509.
- [102] SCHWARZ S, KOHLMANN L, HARTUNG A, et al. Validation of a turbine blade component test with frictional contacts by phase-locked-loop and force-controlled measurements[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2020, 142(5): 051006.
- [103] WANG Xing, SZYDLOWSKI M., YUAN Jie, et al. A multi-step interpolated-FFT procedure for full-field nonlinear modal testing of turbomachinery components[J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2021, 169(15): 108771.