

OPERATIONS RESEARCH REPORT 2014-04



Lineáris optimalizálás elmélete és belsőpontos algoritmusai

Illés Tibor

2014. augusztus 24.

**Eötvös Loránd Tudományegyetem
Operációkutatási Tanszék**

Copyright © Dr. Illés Tibor, 2014
ELTE/BME,
Budapest, Magyarország

ISSN 1215 - 5918

Tartalomjegyzék

Bevezetés	5
1. Lineáris programozás belsőpontos módszereinek az elmélete	9
1.1. A ferdén szimmetrikus önduális feladat	10
1.2. Newton irányok	15
1.3. Szinthalmazok és tulajdonságaik	20
1.4. Centrális út	24
2. Az optimális megoldáshalmaz tulajdonságai	29
2.1. Goldmann-Tucker- illetve Sonnevend tételek	29
2.2. A (B, N) optimális partíció tulajdonságai	32
2.3. A σ_{SP} kondíciószám becslése	34
3. Dikin-féle affin skálázású algoritmus	39
3.1. Dikin irányok	39
3.2. Dikin-féle affin skálázású algoritmus	44
3.3. Megengedett lépéshossz	47
3.4. Dikin-féle affin skálázású algoritmus komplexitása	51
3.5. A (B, N) partíció meghatározása a centrális út környezetében	54
4. Erősen polinomiális kerekítési eljárás	57
4.1. A kerekítési eljárás alkalmazásának a feltételei	57
4.2. Pontos megoldás előállítása	59
5. A Goldman-Tucker modell	65
5.1. Gyenge dualitás tétel	65
5.2. Goldman-Tucker modell	67
5.3. Beágyazás	68
5.4. Goldman-Tucker tétel és következményei	70
6. Teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmikusan büntetőfüggvényes belsőpontos módszer	73
6.1. Lineáris programozási feladatpár, centrális út	74
6.2. Átskálázás	79
6.3. A μ -centrumot közelítő megoldás távolsága a μ -centrumtól	81
6.4. Belsőpontos algoritmus és elemzése	87
Utószó	93

Bevezetés

A jegyzet anyaga. Belsőpontos módszerek megjelenése a lineáris programozásban egy hosszabb folyamat eredménye. Mai ismereteink szerint az első említésre méltó eredmény Frisch nevéhez fűződik, aki 1955-ben egy szemináriumi előadást tartott az Oslói Egyetem ökonometriai szemináriumán a logaritmikus barrier módszer lineáris programozási alkalmazhatóságáról. Módszerét *multiplex algoritmus*nak nevezte el.¹ A másik eredmény, amely szintén észrevétlen maradt Dikin nevéhez fűződik és 1967-ben került publikálásra. Dikin bevezette a róla elnevezett ellipszoidot, amelyik segítségével egy speciális struktúrájú lineáris programozási feladatot tudott közelíteni és a közelítést megoldani. Módszerének ismételt alkalmazásával fogalmazható meg a *primál, affin skálázású belsőpontos algoritmus*.

Az első belsőpontos eredmény, amelyikre azonnal felfigyelt a szakmai közösség Karmarkar *projektív skálázású belsőpontos algoritmus*a, amelyet 1984-ben a *Combinatorica* folyóirat 4. évfolyamának, a 4. számában publikált.

A belsőpontos módszerek elterjedése a lineáris és kvadratikus programozás területén az 1990-es évekre tehető. Lineáris komplementaritási illetve szemidefinit programozási feladatok megoldására a 90-es évek második felében fejlesztették tovább a belsőpontos módszereket.

A jegyzet vázát azok az előadás fóliák alkotják, amelyeket az elmúlt 15 évben készítettem, illetve azok, amelyek szemináriumi vagy konferencia előadásaimhoz, cikkeimhez kapcsolódnak. Ez a jegyzetem kapcsolódik a *Lineáris optimalizálás elmélete és pivot algoritmusai* című, korábbi jegyzetemhez, annak folytatásának tekinthető. A jegyzet célja, hogy a lineáris programozási feladatokkal kapcsolatos, a belsőpontos módszerek elméleti és algoritmikus aspektusai közül a legalapvetőbb és legfontosabb témaköröket tárgyalja.

A jegyzet 6 fejezetből áll. Az első fejezetben az *ferdén szimmetrikus, önduális feladatot* vezetjük be. Ehhez a feladathoz kapcsolódóan definiáljuk a Newton-irányok fogalmát és megadjuk ezek kiszámításának a módját is. Bevezetünk kétféle szinthalmazt, amelyek fontos szerepet játszanak majd a *centrális út* létezésének és egyértelműségének a bizonyításában.

A második fejezetben az optimális megoldás halmaz tulajdonságait vizsgáljuk meg. Igazoljuk szigorúan komplementáris megoldás létezését, bizonyítjuk a Goldmann-Tucker tételt, amelyiknek az eredeti bizonyítása 1956-ból származik. Sonnevend-tétele az analitikus centrum egy fontos tulajdonságát mutatja be. A fejezetet (B,N) partíció és tulajdonságainak a bemutatása illetve a feladat kondíciószámának a bevezetése zárja.

A harmadik fejezet Dikin 1967-ben publikált algoritmusának a primál-duál változatát mutatja be és dolgozza fel. A 4. fejezet egy nagyon fontos és kevésbé ismert tényt dolgoz fel, az *erősen polinomiális kerekítési eljárást*, amelyik segítségével egy speciális ε -optimális

¹Ragnar Frisch 1969-ben Közgazdasági Nobel-díjat kapott. Multiplex algoritmusát 1957-ben publikálta.

megoldásból, pontos megoldás állítható elő, lényegében egy lineáris egyenletrendszer megoldásának a segítségével. Az 5. fejezet oldja fel azokat a kérdéseket, hogyan adható meg egy induló belsőpont egy ferden szimmetrikus, önduális feladat esetén illetve miért elegendő ilyen típusú feladatokkal foglalkozni.

A 6. fejezetben egy teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmikusan büntetőfüggvényes belsőpontos módszert tárgyalunk részletesen. Ez az algoritmus általánosítja Frisch-módszerében megfogalmazott ötleteket. Tárgyaljuk az algoritmus polinomiális lépésszám becslését.

A jegyzetet Utószó zárja.

Mit, hol és kiknek tanítottam lineáris programozásból ? A jegyzet teljes anyagát, az ELTE TTK matematikus és alkalmazott matematikus, 4. és 5. éves hallgatóinak 2 órás előadás keretében adtam elő az elmúlt 15 év során, majdnem minden évben. Az előadásaimon természetesen felhasználtam azt a több száz előadás fóliát, amelyet az évek során készítettem és amelyek a jegyzet első latex változatának tekinthetők.

Lineáris programozás előadást az 1990/91-es tanévben tartottam először az ELTE-n. Később az Eastern Mediterranean University-n, a Strathclyde University-n, majd pedig a BME-n is tanítottam, jelenleg is tanítok, lineáris programozást. Az ELTE TTK-n, egy évfolyam – az 1997/98-as ELTE matematikus és alkalmazott matematikus – kivételével, kizárólag 4. és 5. éves alkalmazott matematikus és matematikus, később mester szakos illetve doktorandusz hallgatókat oktattam. A jegyzet anyagának most elkészült változata az elmúlt több, mint 20 év alatt tisztázódott le, alakult ki. Az utolsó 10-15 évben a tananyag formálói – igényeikkel és kritikájukkal – mindinkább a tehetséges alkalmazott matematikus, matematikus hallgatóim, doktoranduszaim lettek. Számos lineáris optimalizálási témában vezettem szakdolgozatot. Legsikeresebb doktoranduszaimmal – Csizmadia Zsolt, Eisenberg-Nagy Marianna, Nagy Adrienn vagy a fiatalabbak közül Molnár-Szipai Richárd, Egri Attila – a lineáris optimalizálás témakörében közösen értünk el eredményeket, amelyeknek egyikét–másikat beépítettem a tananyagba illetve egy bővített jegyzet anyagába biztosan beépíteném eredeti formájukban vagy lineáris programozási feladatra specializáltan.

Köszönetnyilvánítás.

A jegyzetet jelenlegi változatának elkészítését, a TÁMOP-4.1.2.A/1-11/1-2011-0025 hivatkozási számú, *Interdiszciplináris és komplex megközelítésű digitális tananyagfejlesztés a természettudományi képzési terület mesterszakjaihoz* című pályázata támogatta.

A jegyzet írás nehéz és háládatlan feladatához mérhető a lektori munka is. A jegyzetemnek két lektora volt. E.-Nagy Marianna, volt tanítványom, aki részleteiben követve igyekezett segíteni a munkámat. Precízen bejelölve, a javítandó, szépítendő részeket. Igyekeztem a javításokat elvégezni, de azt hiszem, kihasználom a jegyzet elektronikus voltának az előnyeit, és a bennmaradó hibák javításával időről-időre foglalkozom majd. E.-Nagy Marianna segítségét és kitartó munkáját őszintén köszönöm.

Maros István, – volt tanárom – a hivatalos szakmai lektora a jegyzetemnek, amely nagy megtiszteltetés a számomra. Maros professzor úr maga is két könyv szerzője.² Szakmai

²A *Computational Techniques of the Simplex Method* című Kluwer kiadónál 2003-ban megjelent könyve, nem csak a szimplex, de általában a lineáris programozás pivot algoritmusaival kapcsolatos számítási technikákat összefoglaló, legteltesebb mű az operációkutatás szakirodalmában. Sajnálattal jegyzem meg, hogy hasonló, a belső pontos algoritmusok számítási technikáinak a tárházát összefoglaló mű, még nem létezik.

véleménye, észrevételei és megjegyzései mindig is fontosak voltak a számomra. Maros professzor úrnak, a jegyzetem lektorálásával eltöltött idejét és munkáját, hasznos tanácsait nagyon szépen köszönöm.

Természetesen, hozzá kell tennem, hogy a jegyzetben megmaradó pontatlanságok és hibák kizárólag a szerző munkáját minősítik. Ahogyan észlelem ezeket, vagy felhívják a figyelmet ilyenekre, folyamatosan javítani fogom a jegyzetemet és a pontosított változatokat a honlapomon is nyilvánosságra hozom.

Budapest, 2014. augusztus 24.

Illés Tibor

1. fejezet

Lineáris programozás belsőpontos módszereinek az elmélete

A Klee–Minty-féle lineáris programozási feladat segítségével, a szerzők megmutatták, hogy a primál szimplex módszer számára, az optimális megoldás előállításához szükséges lépés szám (pivot), a **változók számának exponenciális függvénye** is lehet. Hasonló eredmény ismert a criss-cross algoritmusra is, amelyet Roos közölt 1990-ben. Az 1970-es évek második felében és az 1980-as években többféle, ún. *exponenciális ellenpéldát* készítettek pivot algoritmusok viselkedésének bemutatására.

Ma már nyilvánvaló, hogy a szimplex algoritmus elméleti és gyakorlati viselkedésében jelentős eltérés mutatkozik, azaz a tapasztalat szerint a szimplex algoritmus nem nagyon mutat exponenciális lépés számot gyakorlati feladatok esetén, sőt az ismert optimalizálási szoftverek a Klee-Minty-féle feladatot és az ezekhez hasonló exponenciális ellenpéldákat, igen kevés lépésben megoldják. Ez egyértelmű bizonyíték arra is, hogy a mai lineáris programozási szoftverekben, a szimplex algoritmusnak nem az elméleti variánsát kódolták be, hanem nagyon sok numerikus kutatás és programozási munka árán egy sokkal kifinomultabb és természetesen összetettebb algoritmus működik hatékonyan a jelentősebb lineáris programozási szoftverekben. Ezek az algoritmusok felkészülnek numerikus problémák megfigyelésére, észlelésére és természetesen a kezelésükre is. A degenerált feladatok esetén a ciklizálás elkerülésére külön stratégiákat alkalmaznak, könnyedén váltanak a primál és a duál szimplex módszer használata között. Elméleti szempontból ezek a módszerek nagyon összetettek, sokszor használnak a tapasztalat által alátámasztott heurisztikus eljárásokat, így ezeknek az összetett, de szimplex algoritmus variánsoknak az elméleti elemzése, reménytelenül bonyolult eset lenne.

Az exponenciális ellenpéldák nyomán két érdekes megfigyelés alakult ki:

- Minden ismert, lineáris programozási feladat megoldására kidolgozott pivot algoritmusról – még akkor is ha konkrétan nem mutatták meg – azt gondoljuk, hogy létezik olyan példa, amelyen exponenciálisan sok lépést tesz.
- Az exponenciális ellenpéldák nagyon speciális példák a következő két szempont alapján: (i) az exponenciálisan hosszú útvonal akkor mutatható ki, ha megfelelően választjuk ki a kiindulási megengedett bázis megoldást és a célfüggvényt is; (ii) az exponenciális ellenpéldák – tapasztalataink szerint – ritkák, nagyon speciális módon felépített, mesterséges feladatok.

A második megfigyelés, első pontját – igaz lineáris komplementaritási feladatok egy pivot algoritmusa esetén, – Fukuda és Namiki (1994) megvizsgálták és azt találták, hogyha egy exponenciális ellenpélda esetén, az összes lehetséges bázisból elindítják az algoritmust és meghatározzák a megoldásig (amely ebben az esetben egyértelmű volt) az iterációk számát, majd pedig az összes bázisra összegzik az iterációk számát és az összeget elosztják a bázisok számával, akkor azt kapták, hogy az *átlagos* lépésszáma az algoritmusnak az exponenciális ellenpéldán a változók számának lineáris függvénye. Ez az jelenti, hogyha az exponenciális ellenpélda esetén véletlenszerűen veszünk fel egy lehetséges induló bázist, akkor az iterációk várható száma nem lesz exponenciális.

A lineáris programozás igazi, hosszú ideig megoldatlan kérdése a következő volt: létezik-e olyan algoritmus, amelyik a lineáris programozás bármelyik feladatát megoldja olyan sok iterációban, amely a feladat méreteinek (feltételek száma és változók száma) egy polinomjával korlátozható? A kérdés tehát az volt, hogy létezik-e polinomiális algoritmus lineáris programozási feladatok megoldására?

Az igenlő választ Hacsian adta meg, az ellipszoid algoritmus komplexitás elemzésének a közlésével, 1979-ben. Hacsian a nemlineáris programozásból ismert ellipszoid módszert specializálta lineáris programozási feladatok megoldására és sikerült kimutatnia, hogy az ellipszoid módszer polinomiális algoritmus a lineáris programozási feladatok megoldására. Hacsian algoritmusa, annak ellenére, hogy elméletileg polinomiális lépés szám és aritmetikai művelet komplexitása igazolt, gyakorlati feladatok megoldására alkalmas számítógépes megvalósítást senkinek sem sikerült létrehozni.

A belsőpontos módszerek története igen érdekes. Az első olyan algoritmus, amelynek polinomiális komplexitását a szerzője igazolta, **Karmarkar** nevéhez fűződik. Néhány évvel később kiderült, hogy már jóval korábban is születtek olyan algoritmusok lineáris programozási feladatok megoldására, amelyekről igazolni lehet, hogy polinomiális komplexitásúak (R. Frisch, 1957 illetve I. Dikin, 1967).

A belsőpontos módszerek több alapvető algoritmusáról kiderült, hogy nem csak kiváló elméleti tulajdonságaik vannak (iteráció számuk $\mathcal{O}(L\sqrt{n})$), hanem gyakorlati lineáris programozási feladatok megoldására is nagyon hatékonyan alkalmazhatók. A belsőpontos algoritmusok, kivétel nélkül megtalálhatók a legjobb professzionális optimalizálási szoftverekben a szimplex módszer mellett. Közepes és nagyméretű lineáris programozási feladatok esetén a megoldásra fordított idő belsőpontos módszer esetén jóval kisebb, mint a szimplex algoritmussal.

Ebben a fejezetben felépítjük a lineáris programozási feladatok belsőpontos elméletét egy speciális feladatosztályra az ún. *ferdén szimmetrikus önduális lineáris programozási feladatok* osztályára. Ezek a feladatok első látásra nagyon speciálisnak tűnnek, de később megmutatjuk, hogy tetszőleges (P_k) és (D_k) lineáris programozási feladatpárból (5. fejezet) megkonstruálható egy ferdén szimmetrikus önduális lineáris programozási feladat, amelyet a primál-duál típusú belsőpontos módszerek a megoldásuk során használnak.

Ebben a jegyzetben kizárólag primál-duál típusú belsőpontos módszereket tárgyalunk. Igazolni fogjuk polinomiális komplexitásukat.

1.1. A ferdén szimmetrikus önduális feladat

Tárgyalásunkat kezdjük egy példával.

1.1. Példa. Legyen adott a következő lineáris programozási (primál) feladat

$$\min \left. \begin{array}{r} y_2 + 2y_3 \\ -3y_2 + y_3 \geq 0 \\ 3y_1 - 2y_3 \geq -1 \\ -y_1 + 2y_2 \geq -2 \end{array} \right\} (P_{sd})$$

ahol az $y_1, y_2, y_3 \geq 0$. Ennek a feladatnak az alakja megegyezik az 5. fejezetben tárgyalt (D_k) feladat formájával,

$$\min \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad \text{feltéve, hogy} \quad A^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0},$$

tehát a duál feladata

$$\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad \text{feltéve, hogy} \quad A \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

A (P_{sd}) feladata adatai ekkor a következők

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Az A mátrixról könnyen látható, hogy *ferdén szimmetrikus* mátrix, azaz $A = -A^T$, továbbá megállapítható, hogy $\mathbf{b} = -\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ is teljesül. Felhasználva az adatokra kapott összefüggéseket a feladat duálját (általánosan) a következő alakban írhatjuk fel

$$\max -\mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad \text{feltéve, hogy} \quad -A^T \mathbf{x} \leq -\mathbf{c}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

vagyis

$$\min \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad \text{feltéve, hogy} \quad A^T \mathbf{x} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

adódik. Az \mathbf{x} döntési változókat átnevezve \mathbf{y} vektornak, kapjuk a kiindulási feladatot.

Összefoglalva, ha adott egy (D_k) alakú feladat – mint a példánkban – és azt tudjuk, hogy az A mátrix *ferdén szimmetrikus* és $\mathbf{b} = -\mathbf{c} \geq \mathbf{0}$ teljesül, ekkor a (D_k) feladat duálisa, önmaga. Vagyis ebben az esetben a (D_k) feladatot *ferdén szimmetrikus önduális feladatnak* nevezzük.

Egyszerűen megmutatható, hogy ekkor az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *optimális megoldása* – esetünkben – a (P_{sd}) feladatnak és – átlalában – a *ferdén szimmetrikus önduális* (D_k) feladatnak.

A megadott (P_{sd}) feladat esetén megmutatható, hogy

$$\mathbf{y}^T = (2, 1, 3.25) \quad \text{és} \quad \mathbf{s}^T = (A^T \mathbf{y} - \mathbf{c})^T = (0.25, 0.5, 2)$$

szigorú megengedett megoldása a feladatnak. (Belsőpontja.)

Itt szeretnénk megjegyezni, hogy nem minden *ferdén szimmetrikus önduális* lineáris programozási feladatnak van belsőpontos megoldása.

Az előző példa után készen állunk arra, hogy bevezessük általános formában a *ferdén szimmetrikus önduális* lineáris programozási feladatot. Az ilyen típusú lineáris programozási

feladatok vizsgálata lesz a fejezetünk tárgya.

1.2. Definíció. A következő speciális struktúrájú lineáris programozási feladatot *ferdén szimmetrikus önduális lineáris programozási feladatnak* nevezzük

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \mathbf{q}^T \mathbf{x} \\ M\mathbf{x} \geq -\mathbf{q} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (SP),$$

ahol $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ferdén szimmetrikus mátrix és $\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ vektor.

Az (SP) feladat megengedett megoldásainak a halmaza

$$\mathcal{F} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, M\mathbf{x} \geq -\mathbf{q}\} = \{\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n : M\mathbf{x} - \mathbf{s} = -\mathbf{q}\},$$

ahol az $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ az eltérés változó, míg az *optimális megoldások halmaza*

$$\mathcal{F}^* := \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{F} : \mathbf{q}^T \mathbf{x}^* \leq \mathbf{q}^T \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{F}\},$$

lesz.

A következő feladat, három könnyen igazolható, alapvető állítást fogalmaz meg az (SP) feladatra.

1.3. Feladat. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. Bizonyítsuk be, hogy

1. az (SP) duálisa, önmaga (azaz az (SP) feladat önduális feladat);
2. az azonosan nulla vektor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ megengedett és egyben optimális megoldása az (SP) feladatnak;
3. az (SP) optimális megoldásainak a halmaza

$$\mathcal{F}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{F} : \mathbf{q}^T \mathbf{x}^* = 0\}, \quad (1.1)$$

alakban is megadható.

Elemezzük tovább az (SP) lineáris programozási feladat optimális megoldásainak a tulajdonságait. Az előző feladatban azt kaptuk, hogy az optimális megoldáshalmaz, amelyik a megengedett megoldáshalmaznak egy lapja, könnyen leírható, mint a célfüggvénynek, a nulla értékhez tartozó szinthalma, azaz $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ pontosan akkor optimális megoldás, ha

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x} = 0.$$

Figyelembe véve az \mathbf{s} eltérés változó definícióját, a \mathbf{q} vektor a következő módon adható meg

$$\mathbf{q} = \mathbf{s} - M\mathbf{x}.$$

Mindezeket figyelembe véve, az kapjuk, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ pontosan akkor optimális megoldása az (SP) lineáris programozási feladatnak, ha ortogonális az \mathbf{s} eltérés vektorra, ugyanis

$$0 = \mathbf{x}^T \mathbf{q} = \mathbf{x}^T (\mathbf{s} - M \mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s} - \mathbf{x}^T M \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{s},$$

és az utolsó egyenlőség azért következik, mert az M mátrix ferdén szimmetrikus.

Könnyen igazolható a következő állítás:

1.4. Feladat. Legyen adott $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ két vektor. Az \mathbf{x} és \mathbf{s} vektorok pontosan akkor ortogonálisak egymásra, ha

$$x_i s_i = 0, \quad \text{teljesül } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

esetén.

Az előző feladatban megfogalmazott feltétel segítségével bevezethetjük a következő fogalmat.

1.5. Definíció. Legyen adott két tetszőleges vektor, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Azt mondjuk, hogy az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok *komplementárisak*, ha

$$a_i b_i = 0, \quad \text{teljesül } i = 1, 2, \dots, n$$

teljesül.

Tehát az (SP) lineáris programozási feladat optimális megoldásai esetén a döntési változók \mathbf{x} vektora és az eltérés változók \mathbf{s} vektora, komplementáris vektorok. Ez egyben azt is jelenti, hogy az (SP) lineáris programozási feladat optimális megoldásainak a halmazát harmadik féleképpen is megadhatjuk

$$\mathcal{F}^* = \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{F} : (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s}^* = 0, \quad \text{ahol } \mathbf{s}^* = \mathbf{q} - M \mathbf{x}^*\}. \quad (1.3)$$

Bevezethetjük tetszőleges megengedett megoldáshoz tartozóan a *dualitás rés* fogalmát.

1.6. Definíció. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. Legyen továbbá $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ és az $\mathbf{s} = \mathbf{q} - M \mathbf{x}$ az adott megoldáshoz tartozó eltérés változó. Az

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s} = \mathbf{q}^T \mathbf{x}$$

értéket az \mathbf{x} és \mathbf{s} vektorokhoz tartozó *dualitás résnek* nevezzük.

Az előző példában megadott megoldáshoz kiszámolhatjuk a dualitás részt, azaz

$$\mathbf{y}^T \mathbf{s} = 2 \cdot 0,25 + 1 \cdot 0,5 + 3,25 \cdot 2 = 7,5.$$

Természetes módon merül fel az a kérdés, hogyan tudnánk előállítani olyan új megoldásokat, amelyek esetén a dualitás rés kisebb lesz, mint a jelenlegi. Ilyen megoldások létezését biztosítja

az az állítás, hogy az optimális megoldás esetén a dualitás rés nulla és van ilyen megoldásunk, az azonosan nulla vektor.

Az egyik kérdésünk az, hogy az (SP) lineáris programozási feladatnak van-e az azonosan nulla vektoron kívül, optimális megoldása? Érdekel bennünket az a kérdés is, hogy valamely belső pontból (szigorúan pozitív megoldásból) kiindulva, javító lépések sorozatán keresztül eljuthatunk-e optimális megoldáshoz, úgy, hogy minden iterációban csökken a dualitás részünk? Hogyan lehet ilyen algoritmusokat megfogalmazni és mennyire lehetnek ezek hatékonyak?

Kérdéseink megválaszolására a jegyzet további fejezeteiben kerül majd sor.

Először bizonyítsuk be, hogy az (SP) lineáris programozási feladat megengedett megoldásainak a különbsége ortogonális a hozzájuk tartozó eltérés vektorok különbségére.

1.7. Állítás. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ és jelölje a hozzájuk tartozó eltérés vektorokat $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ és $\mathbf{s}(\mathbf{y})$. Ekkor

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{y})) = 0.$$

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$, ezért $\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{q} + M\mathbf{x}$ és $\mathbf{s}(\mathbf{y}) = \mathbf{q} + M\mathbf{y}$, tehát

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{s}(\mathbf{x}) - \mathbf{s}(\mathbf{y})) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{q} + M\mathbf{x} - \mathbf{q} - M\mathbf{y}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})^T M (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0$$

teljesül az M mátrix ferdén szimmetrikussága miatt. ■

Annak érdekében, hogy az (SP) lineáris programozási feladat optimalitási kritériumait megfogalmazzuk, szükségünk lesz az optimális megoldások további jellemzésére is.

1.8. Állítás. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. Tegyük fel, hogy $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ és jelölje a hozzájuk tartozó eltérés vektorokat $\mathbf{s}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{s}(\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$. Az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}^*$ pontosan akkor, ha

$$\mathbf{x} \mathbf{s}(\mathbf{y}) = \mathbf{y} \mathbf{s}(\mathbf{x}).$$

Bizonyítás. Figyelembe véve az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}$ feltételt és felhasználva az előző állítást

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s}(\mathbf{y}) + \mathbf{y}^T \mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s}(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^T \mathbf{s}(\mathbf{y}),$$

amely pontosan akkor nulla, ha $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{F}^*$. Ekkor azt kaptuk, hogy

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s}(\mathbf{y}) + \mathbf{y}^T \mathbf{s}(\mathbf{x}) = 0,$$

amiből figyelembe véve, hogy $\mathbf{x}, \mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{y}, \mathbf{s}(\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}$ következik az állításunk. ■

Az (SP) lineáris programozási feladat *optimalitási kritériumait* a következő alakban is megadhatjuk

$$\left. \begin{array}{l} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{q} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} \mathbf{s} = \mathbf{0} \end{array} \right\} (LCP_{SP}),$$

amelyet az (SP) lineáris programozási feladathoz tartozó *lineáris komplementaritási feladatnak* nevezünk.

Ezt a részt két fontos definícióval zárjuk.

1.9. Definíció. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. A megengedett megoldásoknak definiáljuk egy speciális részhalmazát

$$\mathcal{F}^0 := \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : (\mathbf{x}, \mathbf{s}(x)) > \mathbf{0}\},$$

amelyet *belső pontok halmazának* nevezünk.

Meg kell azonban jegyeznünk, hogy egy (SP) feladatnak nem feltétlenül van belső pontja. Arról, hogy mit kell tennünk, ha nincsen belső pontja vagy nem ismerünk a feladatnak belső pontját később részletesen lesz szó.

Most pedig vezessük be a *szigorúan komplementáris* megoldás fogalmát.

1.10. Definíció. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. Tekintsünk egy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*$ optimális megoldást, a hozzá tartozó eltérés vektorral $\mathbf{s}(x)$. Az $(\mathbf{x}, \mathbf{s}(x))$ párt *szigorúan komplementárisnak* nevezzük, ha $\mathbf{x} + \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$.

A továbbiakban, amennyiben nem megy az érthetőség rovására, az egyszerűség kedvéért az $\mathbf{s}(x)$ eltérés vektor helyett, egyszerűen csak \mathbf{s} vektort írunk.

1.2. Newton irányok

Ebben a részben elkezdjük felépíteni az algoritmusunkat. Tegyük fel, hogy az (SP) lineáris programozási feladat esetén ismerünk egy $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0$ belső pontot, a hozzá tartozó $\bar{\mathbf{s}} = M\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{q} > \mathbf{0}$ eltérés vektorral együtt. Célunk, hogy adott $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ vektorra meghatározzuk a $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ lépést úgy, hogy

$$\begin{aligned} M(\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x}) + \mathbf{q} &= \bar{\mathbf{s}} + \Delta\mathbf{s} \\ (\bar{\mathbf{x}} + \Delta\mathbf{x})(\bar{\mathbf{s}} + \Delta\mathbf{s}) &= \mathbf{w}, \end{aligned}$$

teljesüljön. Ekkor a $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ ismeretlenekre vonatkozóan a következő nem lineáris egyenletrendszert kapjuk:

$$M\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{s}$$

$$\bar{x} \Delta \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} = \mathbf{w} - \bar{x} \bar{\mathbf{s}}.$$

Ez a rendszer még mindig nem lineáris.

A másodrendű $\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s}$ tag elhagyásával az alábbi linearizált egyenletrendszerhez, ún. *Newton-rendszer*hez jutunk

$$\begin{aligned} M \Delta \mathbf{x} - \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{S}} \Delta \mathbf{x} + \bar{X} \Delta \mathbf{s} &= \mathbf{w} - \bar{x} \bar{\mathbf{s}}, \end{aligned}$$

ahol \bar{X} és $\bar{\mathbf{S}}$ olyan diagonális mátrixok, melyek főátlóiban az \bar{x} illetve $\bar{\mathbf{s}}$ vektorok találhatók.

A Newton-rendszer egy lineáris egyenletrendszer, ahol másodrendű tagokat elhanyagoltuk és az $\bar{x} + \Delta \mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}$ új megoldásokról, egyenlőre, nem negativitást (pozitivitást) sem követelünk meg.

Figyelembe véve, hogy az \bar{X} és $\bar{\mathbf{S}}$ pozitív diagonális mátrixok, megmutatjuk, hogy a Newton-rendszer mátrixa reguláris és így a Newton-rendszernek egyértelmű megoldása lesz. (Ez volt az egyszerűsítések értelme, a $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{s}$ vektorokat egyértelműen meg tudjuk határozni.)

1.11. Állítás. Tekintsük a Newton-rendszer mátrixát

$$\bar{M} = \begin{pmatrix} M & -I \\ \bar{\mathbf{S}} & \bar{X} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

ahol az \bar{X} és $\bar{\mathbf{S}}$ pozitív diagonális mátrixok. Ekkor az \bar{M} mátrix reguláris, azaz a Newton-rendszer megoldása egyértelmű.

Bizonyítás. Indirekt módon bizonyítunk, azaz tegyük fel, hogy az \bar{M} mátrix szinguláris. Ez azt jelenti, hogy létezik $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2n} : \bar{M} \mathbf{z} = \mathbf{0}$, de $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$.

Legyen $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ alakú, és ekkor az $\bar{M} \mathbf{z} = \mathbf{0}$ egyenletet

$$\begin{aligned} M \mathbf{u} - I \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{S}} \mathbf{u} + \bar{X} \mathbf{v} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

alakban írhatjuk. Ekkor nyilván $\mathbf{v} = M \mathbf{u}$ lesz.

Mivel a $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ vektor, ezért nyilván az $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ összefüggés is teljesül, vagyis létezik olyan $1 \leq i \leq n$ index, amelyre $u_i \neq 0$. Figyelembe véve az \bar{X} és $\bar{\mathbf{S}}$ mátrixok diagonalitását

$$\bar{s}_i u_i + \bar{x}_i v_i = 0$$

teljesül bármely i indexre. Mivel az $\bar{x}_i > 0$ és az $\bar{s}_i > 0$, ezért, ha $u_i = 0$ teljesülne, akkor $v_i = 0$ következne. Tudjuk, hogy legalább egy i indexre $u_i \neq 0$, akkor

$$-\frac{v_i}{u_i} = \frac{\bar{s}_i}{\bar{x}_i} > 0$$

teljesül, azaz az u_i és v_i előjele különböző, ha $u_i \neq 0$. Az M mátrix ferdén szimmetrikussága miatt

$$0 = \mathbf{u}^T M \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n u_i v_i < 0,$$

ellentmondás adódik, tehát az \bar{M} mátrix reguláris. ■

A Newton-rendszer egyértelmű megoldását *Newton-irányoknak* nevezzük és a következő módon fejezhetjük ki

$$\Delta \mathbf{x} = (\bar{S} + \bar{X} M)^{-1} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}) \quad \text{és} \quad \Delta \mathbf{s} = M (\bar{S} + \bar{X} M)^{-1} (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}). \quad (1.4)$$

A Newton-irányok kiszámítása másként is levezethető, igazolható lenne, ugyanis, ha az első egyenletet behelyettesítjük a második egyenletbe akkor a következő összefüggést kapjuk

$$(\bar{S} + \bar{X} M) \Delta \mathbf{x} = \mathbf{w} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}.$$

Ez alapján megfogalmazható a következő állítás, amelynek a bizonyítását az olvasóra bízunk.

1.12. Feladat. Legyenek adottak az $M, \bar{S}, \bar{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixok, ahol M ferdén szimmetrikus illetve \bar{S} és \bar{X} pozitív diagonális mátrixok. Ekkor az $\bar{S} + \bar{X} M$ mátrix, pozitív definit mátrix.

Fontos alkalmazásai lesznek a következő állításnak.

1.13. Állítás. A Newton-rendszer egyértelmű megoldásai, a $\Delta \mathbf{x}$ és $\Delta \mathbf{s}$ Newton-irányok, ortogonálisak.

Bizonyítás. Tekintsük a Newton-rendszer első egyenletét és szorozzuk meg $\Delta \mathbf{x}$ vektorral balról, azaz

$$(\Delta \mathbf{x})^T \Delta \mathbf{s} = (\Delta \mathbf{x})^T M \Delta \mathbf{x} = 0,$$

figyelembe véve az M mátrix ferdén szimmetrikusságát. ■

Geometriai szempontból a Newton-rendszerrel kapcsolatos eredményeket a következő módon értelmezhetjük: az induló adatainkat, az (SP) lineáris programozási feladat esetén ismerjük, azaz adott egy $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0$ belső pont, a hozzá tartozó $\bar{\mathbf{s}} = M \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{q} > \mathbf{0}$ eltérés vektorral együtt. Célunk olyan $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$ belső pont és hozzá tartozó $\mathbf{s}^+ = M \mathbf{x}^+ + \mathbf{q} > \mathbf{0}$ eltérés vektor előállítására, amelyre vagy $\mathbf{w} = \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+$, vagy pedig az \mathbf{w} és $\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+$ vektorok legyenek közel egymáshoz.

Mivel $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ pozitív vektorok ezért bármilyen irányba létezik olyan α lépéshossz, amelyik esetén

$$\mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x} \quad \text{és} \quad \mathbf{s}^+ = \bar{\mathbf{s}} + \alpha \Delta \mathbf{s}, \quad (1.5)$$

pozitív vektorok lesznek és

$$\mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$$

teljesül és az \mathbf{s}^+ lesz az eltérés vektora, mert a Newton-rendszerből számítottuk ki az irányt.

Miután a Newton irányban egy α lépéshosszú lépést teszünk, az új $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+)$ megoldásra a következő kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ &:= (\bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x})(\bar{\mathbf{s}} + \alpha \Delta \mathbf{s}) = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha (\bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x}) + \alpha^2 \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \\ &= \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha (\mathbf{w} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}) + \alpha^2 \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s}. \end{aligned}$$

Ez az összefüggés világossá teszi, hogy az $\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}$ vektor lokális megváltozását a $\mathbf{w} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}$ vektor határozza meg.

Annak a célnak a vizsgálata szempontjából, hogy milyen α lépéshossz segítségével közelíthetjük meg legjobban a célul kitűzött $\mathbf{w} > \mathbf{0}$ vektort, szükségünk lesz a következő fogalomra.

1.14. Definíció. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok. Az \mathbf{a} és \mathbf{b} vektorok által meghatározott téglán a következő halmazt értjük

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq u_i \leq b_i \text{ vagy } b_i \leq u_i \leq a_i, \forall i \}.$$

Azt mondjuk, hogy a $\mathcal{T}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ téglá belseje nem üres, ha nem létezik olyan i index, amelyre $a_i = b_i$ teljesül.

A következő tétel megmutatja azt, hogy létezik olyan $\alpha > 0$ lépéshossz, amelyre a $\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}$ pontból elléphetünk a \mathbf{w} pont felé, úgy, hogy a $\mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{w})$ téglában maradjunk, feltéve, hogy a téglá belseje nem üres.

1.15. Tétel. Legyen adott az (SP) lineáris programozási feladat. Tekintsünk egy $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0$ belső pontot, a hozzá tartozó $\bar{\mathbf{s}} = M \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{q} > \mathbf{0}$ eltérés vektorral együtt és legyen $\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^n$ vektor. Tetszőleges $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ esetén, amelyre $\text{int} \mathcal{T}(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}}) \neq \emptyset$, létezik $\alpha \in (0, 1)$, úgy hogy

$$\mathbf{x}^+ := \bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{s}^+ := \bar{\mathbf{s}} + \alpha \Delta \mathbf{s}, \quad \mathbf{w}^+ := \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+,$$

ahol $\Delta \mathbf{x}$ és $\Delta \mathbf{s}$ a \mathbf{w} vektorhoz tartozó Newton-rendszer megoldásai, a Newton-irányok, és $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$ teljesül, valamint $\mathbf{w}^+ \in \text{int} \mathcal{T}(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}})$.

Bizonyítás. A Newton-irányok meghatározására a (1.4) összefüggés szolgál. Az új megoldás vektorok $\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+$ esetén (1.5), már korábban állítottuk, hogy az α lépéshossz meghatározható, úgy, hogy ezek a vektorok pozitívak legyenek. Ennek a teljesülése érdekében az $\alpha > 0$ lépéshosszra a következő felsőkorlátok számíthatók ki

$$\alpha \leq \alpha_1 := \min \left\{ -\frac{x_i}{\Delta x_i} : \Delta x_i < 0 \right\},$$

a döntési változók illetve

$$\alpha \leq \alpha_2 := \min \left\{ -\frac{s_i}{\Delta s_i} : \Delta s_i < 0 \right\},$$

a hozzájuk tartozó eltérés változók esetén. Nyilván, ha $\Delta x_i \geq 0$ illetve $\Delta s_i \geq 0$, akkor ezekhez az indexekhez tartozó esetek nem adnak korlátozó feltételt az $\alpha > 0$ értékére.

Ezzel, az $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$ állítások teljesülését beláttuk, figyelembe véve azt, hogy $\Delta \mathbf{x}$ és $\Delta \mathbf{s}$ Newton-irányok. A továbbiakban a $\mathbf{w}^+ \in \text{int } \mathcal{T}(\mathbf{w}, \bar{\mathbf{w}})$ állítás igazolása történik. Először is fogalmazzuk át, egy kicsit az állítást, azt kell igazolnunk, hogy a következő egyenlőtlenségek

$$\min\{\bar{w}_i, w_i\} < w_i^+ = x_i^+ s_i^+ < \max\{\bar{w}_i, w_i\}, \quad (1.6)$$

teljesülnek. Az előző egyenlőtlenségek elemzéséhez vezessük be az alábbi index halmazokat

$$\mathcal{I}_{\mathbf{w}} := \{i : w_i < \bar{w}_i\} \quad \text{és} \quad \mathcal{I}_{\bar{\mathbf{w}}} := \{i : \bar{w}_i < w_i\}.$$

Ha $i \in \mathcal{I}_{\mathbf{w}}$ akkor az alábbi feltételeket kell ellenőriznünk,

1. $w_i < w_i^+$, és
2. $w_i^+ < \bar{w}_i$.

Kezdjük az 1. esettel, ekkor a

$$w_i < w_i^+ = x_i^+ s_i^+ = (x_i + \alpha \Delta x_i) (s_i + \alpha \Delta s_i) = w_i + \alpha (\bar{w}_i - w_i) + \alpha^2 \Delta x_i \Delta s_i,$$

kvadratikusan egyenlőtlenség adódik, amely a

$$0 < \bar{w}_i - w_i + \alpha \Delta x_i \Delta s_i,$$

egyváltozós lineáris egyenlőtlenségre egyszerűsödik, mivel $\alpha > 0$. Ebből az

$$\alpha \leq \alpha_3 := \min_{i \in \mathcal{I}_{\mathbf{w}}} \left\{ -\frac{\bar{w}_i - w_i}{\Delta x_i \Delta s_i} : \Delta x_i \Delta s_i < 0 \right\}$$

pozitív, felső korlátot számítható ki. A 2. eset elemzésekor induljunk ki a következő egyenlőtlenségből

$$\bar{w}_i > w_i^+ = x_i^+ s_i^+ = (x_i + \alpha \Delta x_i) (s_i + \alpha \Delta s_i) = w_i + \alpha (\bar{w}_i - w_i) + \alpha^2 \Delta x_i \Delta s_i,$$

azaz a

$$0 < (\bar{w}_i - w_i) - \alpha (\bar{w}_i - w_i) - \alpha^2 \Delta x_i \Delta s_i$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amely az α változóban másodfokú. Ha a $\Delta x_i \Delta s_i \leq 0$, akkor bármely $\alpha \in (0, 1)$ esetén az előző egyenlőtlenség teljesül. Ellenkező esetben, amikor $\Delta x_i \Delta s_i > 0$, a következő pozitív, felső korlát adódik

$$\alpha \leq \alpha_4 := \min_{i \in \mathcal{I}_{\bar{\mathbf{w}}}} \left\{ -\frac{(\bar{w}_i - w_i) - \sqrt{(\bar{w}_i - w_i)^2 + 4(\bar{w}_i - w_i) \Delta x_i \Delta s_i}}{2 \Delta x_i \Delta s_i} : \Delta x_i \Delta s_i > 0 \right\}.$$

Hasonlóan elemezhető ki az $i \in \mathcal{I}_{\bar{\mathbf{w}}}$ eset is. Ekkor az

$$\alpha \leq \alpha_5 := \min_{i \in \mathcal{I}_{\bar{\mathbf{w}}}} \left\{ \frac{(w_i - \bar{w}_i) - \sqrt{(w_i - \bar{w}_i)^2 - 4(w_i - \bar{w}_i) \Delta x_i \Delta s_i}}{2 \Delta x_i \Delta s_i} : \Delta x_i \Delta s_i < 0 \right\}$$

illetve

$$\alpha \leq \alpha_6 := \min_{i \in \mathcal{I}_{\bar{w}}} \left\{ -\frac{\bar{w}_i - w_i}{\Delta x_i \Delta s_i} : \Delta x_i \Delta s_i > 0 \right\}$$

pozitív felső korlátokat kapjuk. Legyen az $\alpha^* := \min\{1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6\}$, ekkor bármely $\alpha \in (0, \alpha^*)$ lépéshossz esetén

$$\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0 \quad \text{és} \quad \mathbf{w}^+ \in \text{int } \mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \mathbf{w}) \quad \text{teljesül.} \quad \blacksquare$$

1.3. Szinthalmazok és tulajdonságaik

Az optimális megoldás halmaz két különböző alakjának a segítségével, kétféle szinthalmazt definiálhatunk.

Vezessük be először a következő *szinthalmazt*

$$\mathcal{L}_K = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : \mathbf{x}^T \mathbf{s}(\mathbf{x}) \leq K\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F} : \mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq K\},$$

ahol $K \in \mathbb{R}_{\oplus}$ és bármely $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ vektor esetén az alábbi *általánosított szinthalmazt*

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}_{\oplus}^{2n} : \mathbf{s} = M\mathbf{x} + \mathbf{q} \text{ és } \mathbf{x} \mathbf{s} \in (\mathbf{w} - \mathbb{R}_{\oplus}^n)\}$$

is. Nyilvánvaló, hogy ha az $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ teljesül, akkor $\mathbf{x} \mathbf{s} \leq \mathbf{w}$.

A célfüggvény értékével definiált \mathcal{L}_K szinthalmaz következő fontos tulajdonságait mondja ki a következő lemma.

1.16. Lemma. *Legyen adott az (SP) feladat és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor bármely $K \in \mathbb{R}$, $K > 0$ szám esetén az \mathcal{L}_K szinthalmaz nem üres és korlátos, zárt, azaz kompakt.*

Bizonyítás. Az $\mathcal{L}_K \neq \emptyset$, hiszen az $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \in \mathcal{F}$ és $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{q}$ a hozzá tartozó eltérés vektorral megfelel a szinthalmaz definíciójának, mert $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} = \mathbf{0}^T \mathbf{q} = 0 < K$.

Az $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ azaz $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F} : (\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}(\mathbf{x})) > \mathbf{0}$ belső pont. Az egyszerűség kedvéért, az $\bar{\mathbf{s}}(\mathbf{x})$ vektor helyett, $\bar{\mathbf{s}}$ vektort használjuk. Mivel az M mátrix ferdén szimmetrikus, így

$$0 = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T M (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T (\mathbf{s} - \bar{\mathbf{s}}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}^T \bar{\mathbf{x}}, \quad (1.7)$$

ahol az $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_K \subseteq \mathcal{F}$ tetszőleges vektor és az \mathbf{s} a hozzá tartozó eltérés vektor.

Ebből, az \mathcal{L}_K szinthalmaz definíciója alapján azt kapjuk, hogy

$$x_j \bar{s}_j \leq \mathbf{x}^T \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{s}^T \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} \leq K + \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}},$$

és így az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}) > \mathbf{0}$ belsőpont feltétel miatt, bármely $1 \leq j \leq n$ indexre

$$x_j \leq \frac{K + \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}}}{\bar{s}_j}, \quad \text{hasonlóan} \quad s_j \leq \frac{K + \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}}}{\bar{x}_j},$$

azaz az \mathcal{L}_K szinthalmaz korlátos. A zártsága egyszerű következménye a szinthalmaz második felírásának, azaz annak, hogy véges sok zárt féltér metszete. \blacksquare

Az általánosított szinthalmaz \mathcal{L}_w esetén is az előzőhöz hasonló állítás igaz.

1.17. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor bármely $w \in \mathbb{R}_+^n$, vektor esetén az \mathcal{L}_w szinthalmaz nem üres, és korlátos, zárt, azaz kompakt.

Bizonyítás. Az \mathcal{L}_w definíciója miatt az $\bar{x} = \mathbf{0} \in \mathcal{F}$ és $\bar{s} = \mathbf{q}$ a hozzá tartozó eltérés vektorra igaz, hogy $(\bar{x}, \bar{s}) \in \mathcal{L}_w$, azaz $\mathcal{L}_w \neq \emptyset$ teljesül.

Legyen $(x, s) \in \mathcal{L}_w$, azaz $x \in \mathcal{F}$ és $x s \leq w$. Mivel M ferdén szimmetrikus, ezért a (1.7) összefüggés alapján

$$(x - \bar{x})^T (s - \bar{s}) = 0, \quad \text{ahol } \bar{x} \in \mathcal{F}^0$$

és ekkor,

$$x^T \bar{s} + s^T \bar{x} = x^T s + \bar{x}^T \bar{s},$$

azaz

$$x_j \bar{s}_j \leq x^T \bar{s} \leq x^T s + \bar{x}^T \bar{s} = e^T (x s) + e^T (\bar{x} \bar{s}) \leq e^T (w + \bar{w}),$$

ahol $\bar{w} = \bar{x} \bar{s}$. Ekkor bármely $1 \leq j \leq n$ index esetén

$$x_j \leq \frac{e^T (w + \bar{w})}{\bar{s}_j} \quad \text{illetve} \quad s_j \leq \frac{e^T (w + \bar{w})}{\bar{x}_j}$$

teljesül, tehát az \mathcal{L}_w szinthalmaz korlátos.

Legyen

$$\hat{\mathcal{F}} := \{(x, s) \in \mathbb{R}^{2n} : x \in \mathcal{F}, \text{ és } s = Mx + \mathbf{q}\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

korlátos, zárt halmaz és az $f : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x, s) = x s$ folytonos leképezés. Ekkor az

$$f(\hat{\mathcal{F}}) \subseteq \mathbb{R}_+^n \quad \text{zárt halmaz és így az} \quad f(\hat{\mathcal{F}}) \cap (w - \mathbb{R}_+^n) \quad \text{is zárt,}$$

tehát az ősképe \mathcal{L}_w halmaz is zárt. ■

Vezessük be a következő halmazt,

$$\mathcal{F} := \{w \in \mathbb{R}_+^n : \exists (x, s) \in \hat{\mathcal{F}} \text{ amelyre } x s = w\}, \quad (1.8)$$

amely azokat a w vektorokat tartalmazza, amelyek előállíthatók, mint $(x, s) \in \hat{\mathcal{F}}$ (elemenkénti) szorzataként. Ezt, úgy értelmezhetjük, hogy $w \in \mathcal{F}$ vektorok előállíthatók, az (SP) feladat megengedett megoldásainak és a hozzájuk tartozó eltérés vektorok szorzataként.

1.18. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor a \mathcal{F} halmaz nem üres és zárt.

Bizonyítás. Ebben az esetben a \mathcal{F} halmaz nem ürességétől egy kicsit többet igazolunk, azt mutatjuk meg, hogy van olyan $\mathbf{w} \in \mathcal{F} \cap \mathbb{R}_+^n$ vektor, amelyik előáll $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \hat{\mathcal{F}}$ vektorok (elemenkénti) szorzataként. Mivel $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$, ezért létezik $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}) > \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0$, tehát $\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{w}} > \mathbf{0}$, és így $\bar{\mathbf{w}} \in \mathcal{F}$.

Azt kell belátni még, hogy a \mathcal{F} halmaz tartalmazza az összes limeszpontját is. Legyen $\hat{\mathbf{w}} \geq \mathbf{0}$, amelyhez létezik $\mathbf{w}^k \in \mathcal{F}$ sorozat, úgy, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^k = \hat{\mathbf{w}}$. Legyen továbbá $\tilde{\mathbf{w}} > \mathbf{0}$ olyan, hogy $\tilde{\mathbf{w}} > \mathbf{w}^k$ teljesül, bármely k indexre és $\tilde{\mathbf{w}} > \hat{\mathbf{w}}$ is igaz. Az előző lemma és az $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ szinthalmaz konstrukciója alapján, $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ nem üres és kompak halmaz.

A konstrukciónk és a $\mathbf{w}^k \in \mathcal{F}$ sorozat definíciója miatt létezik $(\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k) \in \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$, amelyekre $\mathbf{x}^k \mathbf{s}^k = \mathbf{w}^k$. Az $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ halmaz kompaktsága miatt, az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $\lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}^k, \mathbf{s}^k) = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$.

Figyelembe véve a szorzás folytonosságát és a pontsorozatok definícióját kapjuk, hogy

$$\hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{s}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k \mathbf{s}^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}^k = \hat{\mathbf{w}},$$

azaz a \mathcal{F} halmaz zárt, mert tartalmazza a limeszpontjait. ■

Most már készen állunk arra, hogy a 1.17. Lemma élesítését is igazoljuk azaz, azt, hogy a belsőpont feltétel mellett, $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ nem csak nem üres halmaz, hanem van benne szigorúan pozitív vektor is.

1.19. Tétel. *Legyen adott az (SP) feladat és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor bármely $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$, vektor esetén létezik $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \cap \mathbb{R}_+^{2n}$.*

Bizonyítás. A 1.17. Lemma szerint az $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ halmaz kompak.

Indirekt módon tegyük fel, hogy létezik egy $\hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}_+^n$, vektor, amelyre nem létezik $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}}) \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}} \cap \mathbb{R}_+^{2n}$.

Az $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$, azaz $\exists \bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0 : \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} > \mathbf{0}$. Ekkor az $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{w}}} \cap \mathbb{R}_+^{2n} \neq \emptyset$ és $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{w}}}$ kompak halmaz.

Legyen $\mathbf{w}' > \bar{\mathbf{w}}$ és $\mathbf{w}' > \hat{\mathbf{w}}$. Ekkor az $\mathcal{A} := \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n : \mathbf{e}^T \mathbf{w} \leq \mathbf{e}^T \mathbf{w}'\}$ nem üres és kompak halmaz. Továbbá az $\mathcal{A} \cap \mathcal{F}$ halmaz is nem üres és kompak. Definiáljuk az $f : \mathcal{A} \cap \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}_+^n$ függvényt a következő kifejezéssel

$$f_i(\mathbf{w}) := \begin{cases} 0, & \text{ha } w_i \leq \hat{w}_i \\ w_i - \hat{w}_i, & \text{különben} \end{cases}$$

Az $\|f(\cdot)\|_\infty$ folytonos függvény, hiszen a norma és az f is folytonos függvények. Ekkor a Weirstrass-tétele miatt, létezik

$$\gamma = \|f(\tilde{\mathbf{w}})\|_\infty = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}} \|f(\mathbf{w})\|_\infty \leq \|f(\bar{\mathbf{w}})\|_\infty.$$

Mivel az $\mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}} \cap \mathbb{R}_+^{2n} = \emptyset$ (indirekt feltevés), ezért $\gamma = \|f(\tilde{\mathbf{w}})\|_\infty > 0$, vagyis $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}}) \notin \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$, de $\tilde{\mathbf{w}} \in \mathcal{A} \cap \mathcal{F}$, $\tilde{\mathbf{w}} \geq \hat{\mathbf{w}}$ és $\tilde{\mathbf{w}} = \tilde{\mathbf{x}} \tilde{\mathbf{s}} > \mathbf{0}$.

Definiáljuk a $\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}})$ téglát és alkalmazzuk a 1.15. Tételt.

Ha $\text{int}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) \neq \emptyset$ akkor létezik $\alpha \in (0, 1)$, amelyre

$$\mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x} \text{ és } \mathbf{s}^+ = \bar{\mathbf{s}} + \alpha \Delta \mathbf{s}$$

olyan vektorok, hogy $\mathbf{w}^+ = \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ \in \text{int}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}})$, azaz

$$\|f(\mathbf{w}^+)\|_\infty < \|f(\tilde{\mathbf{w}})\|_\infty = \gamma \quad (1.9)$$

ami ellentmond a Weirstrass-tételnek.

Ha $\text{int}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) = \emptyset$ akkor legyen $\mathbf{w}^* \in \mathcal{B}_{\gamma/3}(\hat{\mathbf{w}}) \cap \text{int}\mathcal{T}(\mathbf{0}, \hat{\mathbf{w}})$ vektor, amely esetén $\text{int}\mathcal{T}(\tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{w}^*) \neq \emptyset$ és megismételhetjük az előző gondolatmenetet, azzal együtt, hogy az α lépés hossza még igaz legyen az a korlát is, amely biztosítja, hogy ebben az esetben $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+) \notin \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$ teljesüljön.

Összegezve a $\tilde{\mathbf{w}} > \mathbf{w}^+$ és $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+) \notin \mathcal{L}_{\tilde{\mathbf{w}}}$, tehát $\|f(\mathbf{w}^+)\|_\infty > 0$ és (1.9) összefüggés ismét teljesül, ami ellentmond a Weirstrass-tételnek.

Mindkét eset arra vezetett, hogy az indirekt feltevésünket el kellett vetnünk, azaz bármely $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$, vektor esetén létezik $(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}} \cap \mathbb{R}_+^{2n}$. ■

A tételünknek igaz az alábbi egyszerű következménye.

1.20. Következmény. Legyen adott az (SP) feladat. Az \mathcal{F}^* halmaz nem üres, konvex poliéder. Sőt, ha az $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ akkor az \mathcal{F}^* halmaz kompakt is.

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{0} \in \mathcal{F}^*$, ezért az optimális megoldások halmaza nem üres. Az, hogy az \mathcal{F}^* konvex poliéder következik az egyik felírásából.

Legyen $\mathbf{w}^i \in \mathbb{R}_+^n$ és $\mathbf{w}^i > \mathbf{w}^{i+1}$, valamint

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{w}^i = \mathbf{0}.$$

Ekkor

$$\mathcal{L}_{\mathbf{w}^{i+1}} \subset \mathcal{L}_{\mathbf{w}^i}$$

teljesül. Ebből

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{L}_0 = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}_{\mathbf{w}^i}$$

adódik, azaz az \mathcal{F}^* halmaz zárt és mivel $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{w}^i}$ következik bármely i indexre, ezért korlátos is. Tehát az \mathcal{F}^* kompakt halmaz is. ■

Ez a következmény értelmezhető úgy is, hogy egy $\mathbf{w}^i \in \mathbb{R}_+^n$ esetén a 1.19. Tétel miatt létezik $(\mathbf{x}^i, \mathbf{s}^i) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}^i} \cap \mathbb{R}_+^{2n}$, sőt az általánosság korlátozása nélkül az is feltehető, hogy $\mathbf{w}^i = \mathbf{x}^i \mathbf{s}^i$. Tekintsük ekkor a $\mathbf{w}^i > \hat{\mathbf{w}} > \mathbf{0}$ vektort, amelyre $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}} \cap \mathbb{R}_+^{2n} \neq \emptyset$ teljesül az előző tétel miatt és így létezik $(\mathbf{x}^{i+1}, \mathbf{s}^{i+1}) \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}} \cap \mathbb{R}_+^{2n}$. Legyen $\mathbf{w}^{i+1} = \mathbf{x}^{i+1} \mathbf{s}^{i+1}$. Vagyis a 1.19. Tétel segítségével, amely a Newton-rendszer megoldásán alapul, generálni tudunk egy $\mathbf{w}^i \in \mathbb{R}_+^n$ pontsorozatot, amelyhez tartozó $(\mathbf{x}^i, \mathbf{s}^i) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}^i} \subset \hat{\mathcal{F}}$ megoldás vektorok sorozat,

optimális megoldás párhoz konvergál. Tehát így egy koncepcionális algoritmust kaptunk. Fontos részletek kidolgozásra szorulnak még, de annyi bizonyos ez alapján is, hogy (i) belső pontokat lehet generálni Newton-rendszerek sorozatának a megoldásával, (ii) az így előállított belső pontok, optimális megoldáshoz konvergálnak. A koncepcionális algoritmus különböző változatainak a kidolgozása a következő fejezetek témája lesz.

Az előző állításokat az alábbi módon összegezzük.

1.21. Következmény. Legyen adott az (SP) feladat és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor az alábbi állítások igazak:

1. Bármely $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, az $\mathcal{L}_{\mathbf{w}}$ kompakt és $\mathcal{L}_{\mathbf{w}} \cap \mathbb{R}_+^{2n}$ nem üres halmaz.
2. Bármely $K > 0$ esetén az \mathcal{L}_K kompakt és $\mathcal{L}_K \cap \mathbb{R}_+^{2n}$ nem üres halmaz.
3. Az \mathcal{F}^* kompakt, nem üres halmaz.

1.4. Centrális út

Legyen adott az (SP) feladat, tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ és tekintsük a feladat optimalitási kritériumait

$$\begin{aligned} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \mathbf{s} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Látható, hogy az első feltétel, az affin lineáris feltétel, míg a második a változók előjel kötöttsége és a harmadik, a – megfelelő – változó párok komplementaritási feltétele. A komplementaritási feltétel belső pontok esetén nyilván nem teljesül, hiszen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0$ esetén a hozzá tartozó eltérés változó $\bar{\mathbf{s}} > \mathbf{0}$, és így

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} > \mathbf{0},$$

adódik. Ez alapján bevezethetjük az optimalitási kritériumoknak egy olyan relaxálját, amelyet belső pontok és hozzájuk tartozó eltérés változók már teljesíthetnek

$$\left. \begin{aligned} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} &= \mathbf{q}, \\ \mathbf{x} &> \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} > \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \mathbf{s} &= \mathbf{w}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{RelOptKrit})$$

ahol $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$.

Korábban, a \mathcal{F} halmazba az olyan $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ vektorokat gyűjtöttük össze, amelyek esetén az előző rendszernek van megoldása. Egyenlőre, nem tudjuk, hogy minden $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ esetén megoldható-e az előző rendszer vagy sem illetve azt sem, hogy egy-egy \mathbf{w} esetén hány megoldásunk lehet.

Az előző részt egy koncepcionális algoritmussal fejeztük be. Ott az a kérdés fogalmazódott meg, hogyan lehetne a 1.20. Következmény bizonyításában megfogalmazott \mathbf{w}^i pontsorozatot előállítani.

Tekintsük a *relaxált optimalitási kritériumok*nak egy speciális változatát, azt amelyiknél $\mathbf{w} = \mu \mathbf{e}$, ahol $\mu > 0$ valós szám és az \mathbf{e} a csupa egyesből álló n -vektor. Ekkor a következő

$$\left. \begin{array}{l} -M\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{q}, \\ \mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} > \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \mathbf{s} = \mu \mathbf{e}, \end{array} \right\} \quad (\text{CentUt})$$

rendszer kapjuk és bevezethetjük a következő fogalmat.

1.22. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor

$$\mathcal{C} := \{(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)) : \mathbf{x}(\mu) \in \mathcal{F}^0, \mathbf{x}(\mu) \mathbf{s}(\mu) = \mu \mathbf{e}, \mu > 0\}$$

az (SP) feladat *centrális útjának* nevezzük.

A centrális út fogalmát, egymástól függetlenül, Sonnevend György (1986) és Nimrod Meggido (1989) vezették be. Mindketten igazolták a centrális út létezését és egyértelműségét. Sonnevend a centrális út felhasználásával un. *útkövető*

Újra felmerül a kérdés, hogy a centrális út létezik-e, azaz bármely $\mu > 0$ valós szám esetén, létezik-e megoldása a (CentUt) feltétel rendszernek illetve a megoldás egyértelműségének a kérdésése is.

Mielőtt kimondjuk és igazoljuk a centrális út létezését és egyértelműségét bizonyító tételt, először igazoljunk egy olyan technikai jellegű lemmát, amelyet az egyértelműség bizonyításakor használni fogunk.

1.23. Lemma. Legyen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy ferdén szimmetrikus mátrix. Ekkor minden $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ létezik olyan j index, melyre $z_j \neq 0$ és $z_j(M\mathbf{z})_j \geq 0$.

Bizonyítás. Indirekt tegyük fel, hogy létezik olyan $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, hogy minden j indexre, amelyre $\bar{z}_j \neq 0$, $\bar{z}_j(M\bar{\mathbf{z}})_j < 0$. Ez esetben

$$0 = \bar{\mathbf{z}}^T M \bar{\mathbf{z}} = \sum_{j=1}^n \bar{z}_j (M\bar{\mathbf{z}})_j = \sum_{j:\bar{z}_j \neq 0} \bar{z}_j (M\bar{\mathbf{z}})_j < 0,$$

ami nyilvánvaló ellentmondás. ■

Készen állunk arra, hogy a belsőpont feltevés mellett igazoljuk, hogy bármely $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ vektor esetén igazoljuk, hogy a (RelOptKrit) illetve bármely $\mu > 0$ valós szám esetén a (CentUt) feltétel rendszereknek létezik és egyértelmű a megoldása.

1.24. Tétel. Legyen adott az (SP) feladat és tegyük fel, hogy $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(i) $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$

(ii) $\forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ esetén $\exists! (\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0 : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}$ és $\mathbf{x}\mathbf{s} = \mathbf{w}$

(iii) $\forall \mu > 0$ esetén $\exists! (\mathbf{x}, \mathbf{s}) > 0 : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}$ és $\mathbf{x}\mathbf{s} = \mu \mathbf{e}$

Bizonyítás. Az (iii) az (ii) állítás speciális esete, így (ii) \Rightarrow (iii).

A (iii) feltételből következik (i) ugyanis $\mathbf{x}(\mu) \mathbf{s}(\mu) = \mu \mathbf{e}$ esetén $\mathbf{x}(\mu) \in \mathcal{F}^0$ teljesül.

Az (i) \Rightarrow (ii) implikációt indirekt bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy

$$\exists \hat{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}_+^n : \nexists \hat{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^0 \quad \text{és} \quad \hat{\mathbf{s}} = M\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{q},$$

amire teljesülne $\hat{\mathbf{w}} = \hat{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{s}}$. Mivel teljesül a belső pont feltétel, $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}}$ kompakt halmaz és $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}} \cap \mathbb{R}_+^{2n} \neq \emptyset$.

Legyen $f : \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ függvény, $f(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s}$. Az indirekt feltevésünk miatt

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s} < \mathbf{e}^T \hat{\mathbf{w}}, \quad \text{minden } (\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}},$$

esetén. Az f folytonos függvény, így Weierstrass tétele miatt felveszi a maximumát az $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}}$ kompakt halmazon:

$$\mathbf{e}^T \bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} = f(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}) = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}}} f(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \max_{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}}} \mathbf{x}^T \mathbf{s} < \mathbf{e}^T \hat{\mathbf{w}}, \quad (1.10)$$

ahol $\bar{\mathbf{w}} := \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}$ és $\bar{\mathbf{w}} \leq \hat{\mathbf{w}}$, de $\bar{\mathbf{w}} \neq \hat{\mathbf{w}}$ az indirekt feltevésünk miatt.

Két eset lehetséges:

1. Ha $\text{int}\mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) \neq \emptyset$ akkor alkalmazhatjuk a 1.15. Tételt és azt kapjuk, hogy

$$\exists \mathbf{w}^+ \in \mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) : \bar{\mathbf{w}} < \mathbf{w}^+ < \hat{\mathbf{w}} \quad \text{és} \quad \mathbf{w}^+ = \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+,$$

ahol $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$. Így $\mathbf{e}^T \bar{\mathbf{w}} < \mathbf{e}^T \mathbf{w}^+$, ez ellentmond a (1.10) egyenlőtlenségnek hiszen $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+) \in \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{w}}}$.

2. Ha $\text{int}\mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \hat{\mathbf{w}}) = \emptyset$, akkor legyen $\delta := \mathbf{e}^T(\hat{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}) > 0$ és definiáljuk

$$\tilde{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}_+^n : \hat{\mathbf{w}} > \tilde{\mathbf{w}} > \hat{\mathbf{w}} - \frac{\delta}{n} \mathbf{e}.$$

Ekkor a $\tilde{\mathbf{w}}$ választási szabálya miatt $\text{int}\mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}}) \neq \emptyset$, azaz létezik $\mathbf{w}^+ \in \mathcal{T}(\bar{\mathbf{w}}, \tilde{\mathbf{w}})$ úgy, hogy

$$\mathbf{w}^+ = \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+, \quad \mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{s}^+ = \bar{\mathbf{s}} + \alpha \Delta \mathbf{s},$$

ahol $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$ és $\alpha \in (0, 1)$. A továbbiakban megmutatjuk, hogy $\mathbf{e}^T \mathbf{w}^+ > \mathbf{e}^T \bar{\mathbf{w}}$, ami ellentmondás (1.10) miatt. Felhasználva a $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{s}$ vektorok ortogonalitását, illetve a Newton-rendszer második feltételét, az

$$\bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} = \tilde{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}$$

egyenlőséget, a következőt kapjuk

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T(\mathbf{w}^+ - \bar{\mathbf{w}}) &= \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} + \alpha (\bar{\mathbf{s}}^T \Delta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}^T \Delta \mathbf{s}) + \alpha^2 (\Delta \mathbf{x})^T \Delta \mathbf{s} - \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} \\ &= \alpha (\bar{\mathbf{s}}^T \Delta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}^T \Delta \mathbf{s}) = \alpha \mathbf{e}^T(\tilde{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

és a $\tilde{\mathbf{w}}$ definíciója miatt $\tilde{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}} > (\hat{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}) - \frac{\delta}{n} \mathbf{e}$, így

$$\mathbf{e}^T(\tilde{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}) > \mathbf{e}^T(\hat{\mathbf{w}} - \bar{\mathbf{w}}) - \frac{\delta}{n} \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \delta - \delta = 0,$$

adódik. A (1.11) egyenlőséget figyelembe véve

$$\mathbf{e}^T \mathbf{w}^+ > \mathbf{e}^T \bar{\mathbf{w}},$$

egyenlőtlenséget kapjuk, amit igazolni szerettünk volna, azaz ellentmondásra jutottunk.

Összefoglalva, az előzőekben beláttuk, hogy bármely $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, létezik

$$(\mathbf{x}, \mathbf{s}) > \mathbf{0} : M\mathbf{x} + \mathbf{q} = \mathbf{s}, \quad \mathbf{w} = \mathbf{x}\mathbf{s}.$$

Az egyértelműség igazolásához, indirekt módon, tegyük fel hogy $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ vektornak létezik két különböző előállítás, azaz létezik $(\mathbf{x}^1, \mathbf{s}^1) > \mathbf{0}$ és $(\mathbf{x}^2, \mathbf{s}^2) > \mathbf{0}$, úgy, hogy

$$M\mathbf{x}^1 + \mathbf{q} = \mathbf{s}^1, \quad \mathbf{w} = \mathbf{x}^1 \mathbf{s}^1 \quad \text{és} \quad M\mathbf{x}^2 + \mathbf{q} = \mathbf{s}^2, \quad \mathbf{w} = \mathbf{x}^2 \mathbf{s}^2,$$

továbbá $(\mathbf{x}^1, \mathbf{s}^1) \neq (\mathbf{x}^2, \mathbf{s}^2)$. Legyen $\mathbf{z} = \mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2 \neq \mathbf{0}$. Az előző, 1.23. Lemma felhasználása miatt, tudjuk, hogy létezik j index, úgy, hogy $x_j^1 \neq x_j^2$ és

$$0 \leq (x_j^1 - x_j^2)(M(\mathbf{x}^1 - \mathbf{x}^2))_j = (x_j^1 - x_j^2)(s_j^1 - s_j^2).$$

Az általánosság korlátozása nélkül, feltehető, hogy $x_j^1 > x_j^2$, így az előző összefüggés alapján

$$s_j^1 \geq s_j^2 \quad (1.12)$$

adódik. Mivel $x_j^1 s_j^1 = w_j = x_j^2 s_j^2$, ezért

$$1 < \frac{x_j^1}{x_j^2} = \frac{s_j^2}{s_j^1} \quad \text{alapján} \quad s_j^1 < s_j^2,$$

adódik és figyelembe véve a (1.12) összefüggést, azt kapjuk, hogy

$$s_j^2 \leq s_j^1 < s_j^2$$

ami ellentmondás, tehát tetszőleges $\mathbf{w} \in \mathbb{R}_+^n$ esetén, a megoldás egyértelmű. ■

Ezzel beláttuk, hogy a centrális út létezik és egyértelmű az (SP) feladat esetén.

2. fejezet

Az optimális megoldáshalmaz tulajdonságai

A centrális út belsőpont feltétel melletti létezése és egyértelmősége, lehetővé teszi azt, hogy megvizsgáljuk hova tart a centrális út, ha a μ paraméter értéke, pozitív számokon keresztül nullához tart azaz a relaxált optimalitási kritérium tart az optimalitási kritériumhoz.

Megvizsgáljuk a centrális út és az optimális megoldás halmaz kapcsolatát (Goldmann-Tucker- illetve Sonnevend-tétele). Kiderül, hogy a centrális út mentén haladva megismerhető az optimális megoldás halmaz struktúrája, de ehhez be kell vezetnünk az (SP) feladat kondíciószámát. Mivel a kondíció szám meghatározása az optimális megoldás kiszámításával ekvivalens feladat, ezért fontos lesz a kondíció számot becsülni. Ehhez a Hadamard-egyenlőtlenséget használjuk majd.

Annak ellenére, hogy a centrális út létezik és egyértelmű, nem tudjuk a μ -centrumokat numerikusan meghatározni, ezért a centrális út egy környezetében fogunk dolgozni.

2.1. Goldmann-Tucker- illetve Sonnevend tételek

A centrális út, adott $\mu > 0$ paraméterhez tartozó $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)) \in \mathcal{C}$ egyértelmű megoldását, μ -centrumnak nevezzük. Adott (SP) feladat esetén, tekintsünk egy μ_k szigorúan monoton nullához tartó sorozatot, a hozzá tartozó μ_k -centrumok $(\mathbf{x}(\mu_k), \mathbf{s}(\mu_k))$ belső pontos, megoldás sorozatával. Igazolni fogjuk, hogy μ_k -centrumok sorozata tart egy optimális megoldáshoz.

2.1. Állítás. Legyen adott az (SP) feladat, melyre $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor létezik $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ az alábbi tulajdonságokkal

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)), \quad \text{és} \quad \mathbf{x}^* \in \mathcal{F}^*.$$

Bizonyítás. Legyen $\mu_k \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots$) egy monoton csökkenő sorozat. Ekkor bármely k indexre fennáll, hogy $(\mathbf{x}(\mu_k), \mathbf{s}(\mu_k)) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}^0}$, ahol $\mathbf{w}^0 = \mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0$. Mivel az $\mathcal{L}_{\mathbf{w}^0}$ halmaz kompakt,

létezik a sorozatnak legalább egy $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ torlódási pontja. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\mathbf{x}(\mu_k), \mathbf{s}(\mu_k)).$$

Tegyük fel, hogy $\bar{\mu}_k \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots$) egy monoton csökkenő sorozat, amelyik eltér az előző sorozattól és tekintsük az ehhez tartozó $(\mathbf{x}(\bar{\mu}_k), \mathbf{s}(\bar{\mu}_k)) \in \mathcal{L}_{\mathbf{w}^0}$ $\bar{\mu}_k$ -centrumok sorozatát. Az általánosság korlátozása nélkül feltehetjük, hogy ez a sorozat konvergens.

A limesz pont definíciójának segítségével, könnyen megmutatható, hogy

$$(\mathbf{x}(\bar{\mu}_k), \mathbf{s}(\bar{\mu}_k)) \rightarrow (\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*).$$

Tehát a centrális úton definiált bármely μ -centrumok sorozatára igaz az, hogy a határértékük az $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ pont, ezért

$$(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)),$$

teljesül. A második állítás nyilvánvaló, ugyanis

$$\mathbf{x}^* \mathbf{s}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}(\mu_k) \mathbf{s}(\mu_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

teljesül a komplementaritási feltétel az $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ megengedett megoldásra, tehát $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}^*$. ■

Goldmann és Tucker (1956) bebizonyították, hogy tetszőleges primál- és duál lineáris programozási feladatok esetén létezik szigorúan komplementáris megoldások. A következő tételben, Goldmann és Tucker eredményét mondjuk ki önduális lineáris programozási feladatára.

2.2. Tétel. (Goldmann-Tucker-tétel.) Legyen adott az (SP) feladat, melyre $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor létezik $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ szigorúan komplementáris megoldása az (SP) feladatnak.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ és jelölje $\sigma(\mathbf{x}) = \{i : x_i > 0\}$ az \mathbf{x} vektor tartóját.

Legyenek $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu))$ a μ -centrumok, adott $\mu > 0$ esetén, mint a 2.1. Állításban és jelölje most is az $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ a centrális út limesz pontját, amelyre $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}^*$ és $\mathbf{x}^* \mathbf{s}^* = \mathbf{0}$ azaz komplementáris megoldás.

Felhasználva az M mátrix ferdén szimmetrikusságát

$$0 = (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}(\mu))^T (\mathbf{s}^* - \mathbf{s}(\mu)) = (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s}^* + \mathbf{x}(\mu)^T \mathbf{s}(\mu) - (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s}(\mu) - (\mathbf{s}^*)^T \mathbf{x}(\mu)$$

egyenlet adódik. Mivel $(\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s}^* = 0$ és $\mathbf{x}(\mu)^T \mathbf{s}(\mu) = \mu n$, ezért

$$\begin{aligned} \mu n &= (\mathbf{x}^*)^T \mathbf{s}(\mu) + (\mathbf{s}^*)^T \mathbf{x}(\mu) = \sum_{i: x_i^* > 0} x_i^* s_i(\mu) + \sum_{i: s_i^* > 0} s_i^* x_i(\mu) \\ n &= \sum_{i: x_i^* > 0} x_i^* \frac{s_i(\mu)}{\mu} + \sum_{i: s_i^* > 0} s_i^* \frac{x_i(\mu)}{\mu} = \sum_{i: x_i^* > 0} \frac{x_i^*}{x_i(\mu)} + \sum_{i: s_i^* > 0} \frac{s_i^*}{s_i(\mu)}. \end{aligned}$$

Az utolsó átalakításnál $x_i(\mu) s_i(\mu) = \mu$ összefüggést használtuk. Ha $\mu \rightarrow 0$ akkor $|\sigma(\mathbf{x}^*)| + |\sigma(\mathbf{s}^*)| = n$ adódik, ami csak úgy teljesülhet, ha az $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ egy szigorúan komplementáris megoldás. ■

Felhasználva a Goldmann-Tucker tételt, a következő meglepő, speciális eredményt tudjuk igazolni.

2.3. Állítás. Legyen adott az (SP) feladat, melyre $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az (SP) feladat egyetlen optimális megoldása akkor és csak akkor, ha $\mathbf{q} > \mathbf{0}$.

Bizonyítás. Ha $\mathbf{q} > \mathbf{0}$, akkor csak $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ esetén lesz $\mathbf{q}^T \mathbf{x} = 0$.

Ha $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az egyetlen optimális megoldás, akkor ez egy szigorúan komplementáris megoldás, azaz $s(\mathbf{x}) = \mathbf{q} > \mathbf{0}$. ■

Az optimális megoldások segítségével érdekes indexhalmazokat tudunk definiálni, amelyek a későbbiek során többször is (pl. az optimális megoldáshalmaz vizsgálatakor), fontos szerepet játszanak majd.

2.4. Definíció. Legyen

$$\begin{aligned} B &:= \{i \in \mathcal{I} : \exists \mathbf{x} \in \mathcal{F}^*, \text{ amire } x_i > 0\} \\ N &:= \{i \in \mathcal{I} : \exists \mathbf{x} \in \mathcal{F}^*, \text{ amire } s_i > 0\} \end{aligned}$$

Az indexeknek a (B, N) felbontását *optimális partíciónak* nevezzük.

Megmutatjuk, hogy (B, N) felbontás, valóban az \mathcal{I} index partícióját adja.

2.5. Állítás. Legyen adott az (SP) feladat, és tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ekkor $I = \{1, 2, \dots, n\}$ indexhalmaznak a (B, N) valóban partíciója.

Bizonyítás. $B \cup N = I$, mert a Goldmann-Tucker tétel miatt létezik $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ szigorúan komplementáris megoldás.

A $B \cap N = \emptyset$ is teljesül az optimális megoldások komplementaritását tárgyaló Goldmann-Tucker tétel alapján. ■

Sonnevend 1986-ban definiálta az analitikus centrum fogalmát, amelyet a következő definícióban, az (SP) feladatra, mi is megadunk.

2.6. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat és tekintsük az $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*$ optimális megoldás vektorokat. Az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^*$ optimális megoldást, amelyre

$$\prod_{i \in B} \bar{x}_i \prod_{i \in N} \bar{s}_i \geq \prod_{i \in B} x_i \prod_{i \in N} s_i,$$

teljesül, bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*$ esetén, az \mathcal{F}^* optimális megoldás halmaz *analitikus centrumának* nevezzük.

Bizonyítsuk be a Sonnevend-tételt.

2.7. Tétel. Legyen adott az (SP) feladat, tegyük fel, hogy $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ és legyen $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ limesz pontja a centrális útnak. Ekkor \mathbf{x}^* az \mathcal{F}^* halmaz analitikus centruma.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*$ egy tetszőleges torlódási pont és legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^*$ tetszőleges, és $\bar{\mathbf{s}} = \mathbf{s}(\bar{\mathbf{x}})$. M ferdén szimmetrikussága miatt

$$0 = (\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}(\mu))^T (\bar{\mathbf{s}} - \mathbf{s}(\mu)),$$

A Goldmann-Tucker-tétel bizonyításában leírtakhoz hasonlóan az alábbi összefüggésre jutunk

$$\sum_{i \in B} \frac{\bar{x}_i}{x_i^*} + \sum_{i \in N} \frac{\bar{s}_i}{s_i^*} = n.$$

A számtani–mértani közép közti egyenlőtlenséget alkalmazva:

$$\left(\prod_{i \in B} \frac{\bar{x}_i}{x_i^*} \prod_{i \in N} \frac{\bar{s}_i}{s_i^*} \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in B} \frac{\bar{x}_i}{x_i^*} + \sum_{i \in N} \frac{\bar{s}_i}{s_i^*} \right) = 1.$$

Így

$$\prod_{i \in B} \bar{x}_i \prod_{i \in N} \bar{s}_i \leq \prod_{i \in B} x_i^* \prod_{i \in N} s_i^*,$$

tehát $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}^*$ analitikus centruma az optimális megoldás halmaznak. ■

2.2. A (B, N) optimális partíció tulajdonságai

Legyen adott az (SP) feladat és definiáljuk a $B, N \subseteq \mathcal{I}$ halmazokat az optimális megoldások segítségével, úgy ahogyan azt tettük a 2.4. Definícióban, azaz

$$B := \{i \in \mathcal{I} : x_i > 0, \exists \mathbf{x} \in \mathcal{F}^*\} \quad \text{és} \quad N := \{i \in \mathcal{I} : s(x)_i > 0, \exists \mathbf{x} \in \mathcal{F}^*\},$$

esetén, ahol \mathcal{F}^* halmaz az (SP) feladat optimális megoldás halmaza. A 2.5. Állítás bizonyításában igazoltuk, hogy a B, N indexhalmazok, az \mathcal{I} indexhalmaz egy felbontását, partícióját adja.

Ezután beláthatjuk a következő egyszerű állítást.

2.8. Feladat. Legyen adott az (SP) feladat. Az $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ vektorra pontosan akkor igaz, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*$, ha az $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$ és $\mathbf{s}_B = \mathbf{0}$ teljesül.

Tetszőleges $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*$ optimális megoldásra fennáll az

$$\mathbf{x} \mathbf{s}(x) = \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{x} + \mathbf{s}(x) \geq \mathbf{0}$$

összefüggés. Definiáljuk az (SP) feladat kondíciószámát, amely az \mathcal{F}^* optimális halmazon a nemnulla koordináták nagyságrendjét jellemzi, azaz

$$\sigma_{SP}^x = \begin{cases} \min_{i \in B} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*} \{x_i\}, & \text{ha } B \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{különben} \end{cases} \quad \text{és} \quad \sigma_{SP}^s = \begin{cases} \min_{i \in N} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*} \{s_i\}, & \text{ha } N \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{különben} \end{cases}$$

2.9. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat. A

$$\sigma_{SP} := \min\{\sigma_{SP}^x, \sigma_{SP}^s\} = \min_{i \in B \cup N} \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*} \{x_i + s_i\},$$

számot az (SP) feladat kondíciószámának nevezzük.

Az eddig kialakult kép alapján, ha a centrális utat, a csökkenő μ paraméter értékek mellett, az egyértelmű $\mathbf{x}(\mu)$, $\mathbf{s}(\mu)$ μ -centrumok mentén bejárhatnánk, akkor azt kellene tapasztalnunk, hogy a μ -centrumok bizonyos koordinátái, a centrális út mentén csökken, ahogyan a μ értéke csökken, vagyis amikor közeledünk az optimális megoldás halmazhoz. Ennek a jelenségnek komoly numerikus következményei is lesznek. A következő lemmában, igazoljuk az elképzelésünket.

2.10. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat, a B, N partíció és a feladat σ_{SP} kondíciószáma. Bármely $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)) \in \mathcal{C}$, $\mu > 0$ esetén igazak az alábbi egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} x_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{SP}}{n} & i \in B, & & x_i(\mu) &\leq \frac{n\mu}{\sigma_{SP}} & i \in N, \\ s_i(\mu) &\leq \frac{n\mu}{\sigma_{SP}} & i \in B, & & s_i(\mu) &\geq \frac{\sigma_{SP}}{n} & i \in N. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}^*$ tetszőleges. Ekkor az ortogonalitási tulajdonság miatt

$$(\mathbf{x}(\mu) - \mathbf{x}^*)^T (\mathbf{s}(\mu) - \mathbf{s}^*) = 0, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{x}(\mu)^T \mathbf{s}^* + \mathbf{s}(\mu)^T \mathbf{x}^* = n\mu.$$

Amiből következik az

$$x_i(\mu) s_i^* \leq \mathbf{x}(\mu)^T \mathbf{s}^* \leq n\mu, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Mivel a B, N partíció definíciója miatt $s_i^* \geq \sigma_{SP}$ teljesül, és $x_i(\mu) s_i(\mu) = \mu$, minden $i \in N$ esetén, így

$$x_i(\mu) \leq \frac{n\mu}{s_i^*} \leq \frac{n\mu}{\sigma_{SP}} \quad \text{és} \quad s_i(\mu) \geq \frac{\sigma_{SP}}{n}, \quad i \in N.$$

A többi korlát hasonlóan bizonyítható. ■

Az előző lemmában láthattuk, hogy bizonyos koordináták a μ paraméter értékével arányosan csökkennek a centrális út mentén, mások, pedig egy elméleti korlát felett maradnak. Bevezethetjük a következő definíciót.

2.11. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, a B, N partíció és a feladat σ_{SP} kondíciószáma. Továbbá tekintsük, a $\mu > 0$ centralitás út paramétert és az $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)) \in \mathcal{C}$ μ -centrumokat. Ekkor az $x_i(\mu)$ koordinátát **nagynak** mondjuk, ha $i \in B$, illetve az $s_i(\mu)$ koordinátát **nagynak** mondjuk, ha $i \in N$. Ellenkező esetben **kicsinek** nevezzük.

Felmerül az a kérdés, hogy a centrális út mentén megadható-e egy olyan μ centralitási paraméter, amelyiknél a B és N index halmazok előállíthatók.

2.12. Következmény. Legyen adott az (SP) feladat és a feladat σ_{SP} kondíciószáma. Ha $\mu < \frac{\sigma_{SP}^2}{n^2}$ centrális út paraméterhez ismert egy $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)) \in \mathcal{C}$ megoldás, akkor meghatározhatjuk a (B, N) partíciót.

Bizonyítás. A megadott μ érték mellett

$$\frac{n\mu}{\sigma_{SP}} < \frac{\sigma_{SP}}{n}$$

teljesül, azaz a kicsi és nagy koordináták a $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu)) \in \mathcal{C}$ megoldás esetén már szétválaszthatók. Így a következő szétosztás egyértelmű és megfelelő

$$B := \left\{ i : x_i(\mu) \geq \frac{\sigma_{SP}}{n} \right\} \quad \text{és} \quad N := \left\{ i : s_i(\mu) \geq \frac{\sigma_{SP}}{n} \right\}. \quad \blacksquare$$

2.3. A σ_{SP} kondíciószám becslése

Vezessünk be egy fogalmat és egy egyenlőtlenséget, amelyre ebben a részben szükségünk lesz.

2.13. Definíció. Az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ **tartója** a $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{j \in I : x_j > 0\}$ halmaz, ahol $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

Determinánsok becsléséhez szükségünk lesz a Hadamard-egyenlőtlenségre.

2.14. Feladat. (Hadamard-egyenlőtlenség.) Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ekkor bizonyítsa be, hogy a

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|,$$

ahol \mathbf{a}_j vektor az A mátrix j . oszlop vektora.

Két lemma igazolásán keresztül eljutunk a σ_{SP} kondíciószám becsléséig, alsó korlátot adunk majd a kondíciószámra.

2.15. Lemma. Tekintsük a következő megengedettségi feladatot

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

ahol az $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix és a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ vektor és tegyük fel, hogy $\mathcal{M} \neq \emptyset$ halmaz és az A mátrixnak nincsen azonosan nulla oszlopa. Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}$ olyan vektor, amely esetén $\text{supp}(\bar{\mathbf{x}})$ minimális. Ekkor az

$$\{\mathbf{a}_j : j \in \text{supp}(\bar{\mathbf{x}})\} = \{\mathbf{a}_j : \bar{x}_j > 0, j \in I\}$$

vektor rendszer elemei lineárisan független vektorok.

Bizonyítás. Indirekt, tegyük fel, hogy az $\{\mathbf{a}_j : j \in \text{supp}(\bar{\mathbf{x}})\}$ vektorok lineárisan összefüggők. Mivel az $\bar{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ vektor, ezért a $\text{supp}(\bar{\mathbf{x}}) \neq \emptyset$. Ekkor létezik $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, úgy, hogy

$$\sum_{j \in \text{supp}(\bar{\mathbf{x}})} z_j \mathbf{a}_j = \mathbf{0} \text{ és } z_k = 0, \text{ ha } k \notin \text{supp}(\bar{\mathbf{x}}), \text{ azaz } A\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Nyilván

$$A(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{z}) = A\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon A\mathbf{z} = \mathbf{b},$$

azaz, bármely $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esetén az affín lineáris feltétel teljesül. Sőt, megválasztható az $\varepsilon \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$\text{supp}(\bar{\mathbf{x}} + \varepsilon \mathbf{z}) = \text{supp}(\bar{\mathbf{x}}) \text{ legyen, és } \bar{x}_j + \varepsilon z_j > 0, \text{ ha } j \in \text{supp}(\bar{\mathbf{x}}).$$

Mivel a $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, ezért létezik $j \in \text{supp}(\bar{\mathbf{x}})$ úgy, hogy $z_j < 0$, vagy $z_j > 0$. Ekkor pedig az

$$\bar{\varepsilon} = \min \left\{ -\frac{\bar{x}_j}{z_j} : z_j < 0 \right\} > 0 \quad \left(\bar{\varepsilon} = \max \left\{ -\frac{\bar{x}_j}{z_j} : z_j > 0 \right\} < 0 \right)$$

esetén a $\text{supp}(\bar{\mathbf{x}} + \bar{\varepsilon} \mathbf{z}) < \text{supp}(\bar{\mathbf{x}})$ ellentmond annak feltevésnek, hogy a $\text{supp}(\bar{\mathbf{x}})$ minimális. ■

Most pedig rátérhetünk annak a lemmének a kimondására és bizonyítására, amely egy megengedettségi feladat esetén megbecsüli alulról, a koordinátánkénti maximumot.

2.16. Lemma. Tekintsük a következő megengedettségi feladatot

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\},$$

ahol az $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mátrix és $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^m, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ vektor. Legyen az \mathcal{M} halmaz korlátos és tegyük fel, hogy van szigorúan pozitív vektora. Ekkor bármely $i \in I$ index esetén

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} x_i \geq \frac{1}{\prod_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|}.$$

Bizonyítás. Az \mathcal{M} halmaz korlátos, ezért az A mátrixnak nem lehet azonosan nulla oszlopa.

Két eset lehetséges:

1. $\text{rang}(A) = m$ (így szükségképpen $m \leq n$);

2. $q = \text{rang}(A) < m$.

1. eset: $\text{rang}(A) = m$ (így szükségképpen $m \leq n$).

Az \mathcal{M} halmaz korlátosságát és belsőpont létezését is figyelembe véve, bármely rögzített $i \in I$ index esetén létezik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{M}$ úgy, hogy

$$\bar{x}_i = \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} x_i > 0.$$

Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $\bar{\mathbf{x}}$ bázis megoldás, és jelölje B a bázis mátrixot. Ekkor a Cramer-szabály miatt

$$\bar{x}_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)} > 0,$$

ahol a B_i mátrixot a B mátrixból úgy nyertük, hogy az i . változóhoz tartozó oszlop helyére a \mathbf{b} vektort raktuk be. Az $\bar{x}_i > 0$ feltétel és az egészértékű adatok miatt $|\det(B_i)| \geq 1$. Másfelől

$$\det(B) \leq |\det(B)| \leq \prod_{j \in \text{supp}(\bar{\mathbf{x}})} \|\mathbf{a}_j\| \leq \prod_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|$$

egyenlőtlenségeket nyerjük, a Hadamard-egyenlőtlenség alkalmazásával. Az eddigiek alapján

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{M}} x_i = \bar{x}_i = \frac{\det(B_i)}{\det(B)} = \frac{|\det(B_i)|}{|\det(B)|} \geq \frac{1}{|\det(B)|} \geq \frac{1}{\prod_{j=1}^n \|\mathbf{a}_j\|}.$$

2. eset: $q = \text{rang}(A) < m$.

A redundáns feltételek elhagyásával egy $A' \in \mathbb{Z}^{q \times n}, \mathbf{b}' \in \mathbb{Z}^q$ feladatot kapunk, ahol a mátrixunk már teljes rangú, azaz az első esethez jutottunk. Vegyük észre, hogy

$$\|\mathbf{a}'_j\| \leq \|\mathbf{a}_j\| \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

így a második esetben is igaz az állításunk. ■

Készen állunk arra, hogy a σ_{SP} kondíció számot, a Hadamard-egyenlőtlenség felhasználásával megbecsüljük. Ez pedig már – elméletileg – számolhatóvá teszi a B, N partíció indexhalmazát.

2.17. Tétel. Legyen adott az (SP) feladat, melyre $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Ha az $M \in \mathbf{Z}^{m \times n}$ mátrix és a $\mathbf{q} \in \mathbf{Z}^m$ vektor, akkor az (SP) feladat kondíciószámára a következő alsó becslés teljesül,

$$\sigma_{SP} \geq \frac{1}{\prod_{j=1}^n \|\mathbf{m}_j\|}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a (B, N) partíció ismert és ennek megfelelően bontsuk fel a feladat lineáris feltételeit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} \\ M_{NB} & M_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_N \end{pmatrix}$$

Legyen \mathbf{x} egy szigorúan komplementáris, optimális megoldás, azaz

$$0 = \mathbf{q}^T \mathbf{x} = \mathbf{q}_B^T \mathbf{x}_B + \mathbf{q}_N^T \mathbf{x}_N,$$

mivel $\mathbf{x}_B > \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}_N = \mathbf{0}$, ezért $\mathbf{q}_B = \mathbf{0}$. Ekkor

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} \\ M_{NB} & M_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{q}_N \end{pmatrix}$$

elvégezve a kijelölt számolásokat és figyelembe véve az \mathbf{x} és \mathbf{s} optimális megoldás komplementaritását is, azt kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB}\mathbf{x}_B \\ M_{NB}\mathbf{x}_B + \mathbf{q}_N \end{pmatrix}.$$

Átalakítva, az optimális megoldás halmaz leírását kapjuk

$$\begin{pmatrix} M_{BB} & 0_{BN} \\ M_{NB} & -I_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_B \\ -\mathbf{q}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}, \mathbf{x}_N = \mathbf{0}, \mathbf{s}_B = \mathbf{0}, \mathbf{s}_N \geq \mathbf{0}.$$

Az utóbbi rendszer éppen az \mathcal{F}^* leírása, ami nem üres és tartalmaz szigorúan komplementáris megoldást, így az

$$A = \begin{pmatrix} M_{BB} & 0_{BN} \\ M_{NB} & -I_{NN} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_B \\ -\mathbf{q}_N \end{pmatrix}$$

választással alkalmazhatjuk az előző lemmát. Tehát

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*} x_i \geq \frac{1}{\prod_{j \in B} \|\mathbf{m}_j\|}, \quad \forall i \in B, \quad \text{és} \quad \max_{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^*} s_i \geq \frac{1}{\prod_{j \in B} \|\mathbf{m}_j\|}, \quad \forall i \in N.$$

Ebből következik, hogy

$$\sigma_{SP} \geq \frac{1}{\prod_{j \in B} \|\mathbf{m}_j\|} \geq \frac{1}{\prod_{j=1}^n \|\mathbf{m}_j\|}.$$

A második, rosszabb alsó korlát előnye az, hogy nincsen szükség a (B, N) partíció ismeretére. ■

Mielőtt lezárnánk ezt a fejezetet, mondjunk ki feladatként két segédlemmát, amelyeket a Dikin-féle affin skálázású algoritmus tárgyalása során használunk majd.

2.18. Feladat.

1. Legyen a $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív definit, és az $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ferdén szimmetrikus mátrix. Ekkor a $D + M$ és az $I + DMD$ pozitív definit mátrixok.
2. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pozitív definit mátrixok. Ekkor az $A^{-1}B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ is pozitív definit mátrix.

3. fejezet

Dikin-féle affin skálázású algoritmus

Dikin 1967-ben lineáris programozási feladat megoldására egy iteratív, primál belső pontos algoritmust, un. *primál affin skálázású algoritmust* vezetett be, és bizonyította, hogy az algoritmus által generált szigorúan megengedett megoldások egy optimális megoldáshoz konvergálnak.

Dikin algoritmusát az 1980-as évek végén újra felfedezték és az algoritmus komplexitása szempontjából elemezték. Terlaky Tamás és szerzőtársai az affin skálázású algoritmus, primál-duál változatát készítették el és Dikin előtt tisztelegve, *Dikin-féle affin skálázású algoritmusnak* nevezték el.

Ebben a fejezetben ezt az algoritmust mutatjuk be.

3.1. Dikin irányok

Tekintsük az (SP) feladatot, legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$. Keressünk olyan $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ irányt, amelyre a következő elvárások teljesülnek

1. $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ és $\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s} > \mathbf{0}$,
2. minél jobban csökkenjen a dualitásrés az új megoldás esetén.

Tegyük fel, hogy $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ irány olyan, amelybe megengedett lépést lehet tenni és a dualitás rés csökken is. Ekkor az új dualitásrés értékét az alábbi módon számíthatjuk ki

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^T \mathbf{x}^+ &= (\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})^T (\mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}) = \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta\mathbf{s} + (\Delta\mathbf{x})^T \Delta\mathbf{s} = \\ &= \mathbf{x}^T \mathbf{s} + \mathbf{s}^T \Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta\mathbf{s} = \mathbf{q}^T \mathbf{x} + \mathbf{s}^T \Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta\mathbf{s}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ahol az új megoldás az $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+) = (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s})$ lesz.

3.1. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. A $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ vektorpárt *csökkenési irány*nak nevezzük, ha

$$\mathbf{q}^T \mathbf{x}^+ < \mathbf{q}^T \mathbf{x},$$

teljesül, ahol $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+) = (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s})$ és $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$, vagyis a dualitás rés csökken, amikor áttérünk az új megoldásra.

Az előző definíció és a (3.1) összefüggés alapján $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$ pontosan akkor lesz csökkenési irány, ha

$$\mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s}$$

kifejezés negatív lesz. A legjobb csökkenési irány keresését lineáris programozási feladatként is megfogalmazhatjuk:

$$\left. \begin{array}{l} \min \{ \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s} \} \\ -M \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (IF),$$

ahol $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ adott megoldás és $\mathbf{s} > \mathbf{0}$ hozzá tartozó eltérés vektor. Az (IF) az eredeti feladattal azonos feladatosztályba tartozik, ezért kénytelenek vagyunk egy módosított feladatot megoldani. Dikin (1967) ötlete alapján keressünk egy könnyebben megoldható feladatot, amely közelíti (approximálja) az eredeti feladatot. Tegyük ezt úgy, hogy a pozitivitási megkötést elhagyjuk, és helyette egy (konvex) zárt ellipszoidon keressük az elérhető legjobb csökkenési irányt. Előfordulhat, hogy ekkorát lépve nem megengedett megoldáshoz jutunk, ezért csak egy később meghatározandó α hosszúságú lépést fogunk tenni ebbe az irányba. Dikin ötletét használva felírhatjuk a

$$\left. \begin{array}{l} \min \{ \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{s} \} \\ -M \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s} = \mathbf{0} \\ \left\| \frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta \mathbf{s}}{\mathbf{s}} \right\| \leq 1 \end{array} \right\} \quad (SF),$$

feladatot. A segéd feladatban megjelenő nem lineáris feltételről megmutatható, hogy valóban ellipszoid, és ezt a speciális struktúrájú ellipszoidot, *Dikin-féle ellipszoid*nak nevezzük. Belátható a következő állítás.

3.2. Feladat. 1. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. Az

$$\mathcal{E}_D := \{ (\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{2n} : \left\| \frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta \mathbf{s}}{\mathbf{s}} \right\| \leq 1 \}$$

halmaz ellipszoid, azaz egy pozitív szemidefinit mátrixhoz tartozó konvex kvadratikusan függvény szinthalma, amely korlátos és zárt is, azaz kompakt.

2. Megmutatható, hogy az (IF) feladat átalakítható a következő alakra

$$\left. \begin{array}{l} \min \{ \mathbf{s}^T \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x}^T M \Delta \mathbf{x} \} \\ \| S^{-1} (X^{-1} S + M) \Delta \mathbf{x} \| \leq 1 \end{array} \right\} \quad (\overline{IF}),$$

ahol $X = \text{diag}(\mathbf{x})$, $S = \text{diag}(\mathbf{s})$ pozitív diagonális mátrixok. Az (\overline{IF}) lineáris célfüggvény minimalizálása (szigorúan) konvex, kompakt, nemüres halmaz felett.

Térjünk vissza az (SF) feladatra. Azt állítjuk – és később ezt meg is mutatjuk, – hogy az (SF) feladat, átparaméterezhető egy gömbön való lineáris optimalizálási feladattá, amely az alábbi állítás alapján könnyen megoldható.

3.3. Feladat. Tekintsük a következő optimalizálási feladatot

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_2 \leq 1 \}$$

ahol $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ egy nem azonosan nulla vektor. A feladat optimuma

$$\mathbf{x}^* = -\frac{\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|_2},$$

lesz.

Ez azt jelenti, hogy az iránykereső (*IF*) feladat relaxálása az (*SF*) feladattal, majd pedig annak az átskálázása a 3.3. Feladatban található optimalizálási problémává, lehetővé teszi csökkenési irány előállítását egyetlen lépésben, iteratív eljárás nélkül. Dikin ötlete alapján tehát a csökkenési irány, az un. *Dikin-irány* meghatározása egyszerű feladattá vált.

Mutassuk be Dikin eljárásának az utolsó elemét, az un. *átskálázást*.

Felhasználva a Hadamard-szorzáshoz (vektorok koordinátánkénti szorzása), hasonlóan az osztást is, arra természetesen vigyázva, hogy a vektorral való osztás csak nem nulla (esetünkben pozitív) vektorral történjen.

Az átskálázás megvalósításához szükségünk lesz az alábbi új adatokra illetve változókra

$$\mu := \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{n}, \quad \mathbf{d} := \sqrt{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{s}}}, \quad \mathbf{u} := \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}}.$$

Ekkor, nagyon egyszerűen, a következő összefüggések vezethetők le

$$\sqrt{\mathbf{x}\mathbf{s}} = \sqrt{\mu} \mathbf{u} \quad \text{és} \quad \mathbf{d}^{-1} \mathbf{x} = \sqrt{\mu} \mathbf{u} = \mathbf{d}\mathbf{s}.$$

Vezessük be a \mathbf{p}_x és \mathbf{p}_s vektorokat úgy, hogy

$$\mathbf{d}^{-1} \Delta \mathbf{x} = \sqrt{\mu} \mathbf{p}_x \quad \text{és} \quad \mathbf{d} \Delta \mathbf{s} = \sqrt{\mu} \mathbf{p}_s,$$

teljesüljön. Ekkor az alábbi összefüggéseket vezethetjük le

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{d}^{-1} \Delta \mathbf{x}}{\mathbf{d}^{-1} \mathbf{x}} = \frac{\sqrt{\mu} \mathbf{p}_x}{\sqrt{\mu} \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{p}_x}{\mathbf{u}} \quad \text{és} \quad \frac{\Delta \mathbf{s}}{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{d} \Delta \mathbf{s}}{\mathbf{d} \mathbf{s}} = \frac{\sqrt{\mu} \mathbf{p}_s}{\sqrt{\mu} \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{p}_s}{\mathbf{u}}$$

és ezek után a Dikin-ellipsoid feltétel argumentumára azt kapjuk, hogy

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta \mathbf{s}}{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s}{\mathbf{u}}.$$

Vezessük be a $\mathbf{p} := \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s$ jelölést, az előző egyenletet, tovább egyszerűsíthetjük

$$\frac{\Delta \mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta \mathbf{s}}{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s}{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}},$$

adódik. Az (*SF*) iránykereső feladat célfüggvénye az átskálázás után

$$\mathbf{s} \Delta \mathbf{x} + \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} = (\mathbf{s}\mathbf{d})(\mathbf{d}^{-1} \Delta \mathbf{x}) + (\mathbf{x}\mathbf{d}^{-1})(\mathbf{d} \Delta \mathbf{s}) = \sqrt{\mu} \mathbf{u} \sqrt{\mu} \mathbf{p}_x + \sqrt{\mu} \mathbf{u} \sqrt{\mu} \mathbf{p}_s = \mu \mathbf{u}\mathbf{p},$$

lesz. Mivel az (SF) feladatban szereplő lineáris egyenletet a $\Delta \mathbf{x}$ meghatározásakor felhasználjuk, így a \mathbf{p}_x meghatározásakor is felhasználásra kerül majd, tehát az átskálázott feladatból kihagyható, amikor a \mathbf{p} vektor kiszámítása a cél. Az (SF) feladat átskálázásakor először a következő optimalizálási feladatot írhatjuk fel

$$\min \mu \mathbf{u}^T \mathbf{p} \\ \|\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}}\| \leq 1,$$

majd egy újabb változó cserével

$$\bar{\mathbf{p}} := \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{u}}$$

az alábbi végleges alakot nyerjük

$$\min \mu (\mathbf{u}^2)^T \bar{\mathbf{p}} \\ \|\bar{\mathbf{p}}\| \leq 1,$$

ahol a döntési változó a $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^n$ vektor, a feladat célfüggvénye lineáris és a célfüggvény együttható vektora a $\mu \mathbf{u}^2 \in \mathbb{R}^n$ vektor. Ez a feladat pontosan azt fejezi ki, hogy az egység gömb felett szeretnénk optimalizálni egy lineáris célfüggvényt, és a 3.3. Feladat alapján azonnal felírhatjuk az egyértelmű optimális megoldását

$$\bar{\mathbf{p}} = -\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{p} = -\frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|}$$

és kiszámíthatjuk az átskálázott feladat optimum értékét

$$\mu (\mathbf{u}^2)^T \bar{\mathbf{p}} = \mu (\mathbf{u}^2)^T \left(-\frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) = -\mu \frac{\|\mathbf{u}^2\|^2}{\|\mathbf{u}^2\|} = -\mu \|\mathbf{u}^2\| = -\mu \left\| \frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu} \right\| = -\|\mathbf{x}\mathbf{s}\|. \quad (3.2)$$

Mivel az optimum értéke negatív, így az átskálázott irány egy csökkenési irányt ad. A skálázásban csak pozitív vektorok és számok szerepeltek, tehát a vissza skálázott változók esetén is csökkenési irányt kapunk.

Nyilvánvaló, hogy a

$$\mathbf{0} = -M\Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s}$$

lineáris egyenletrendszer is át kell skáláznunk, úgy, hogy a döntési változók a \mathbf{p}_x és \mathbf{p}_s vektorok legyenek. Ekkor a következő összefüggést kapjuk

$$-M\Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{s} = -MD(D^{-1}\Delta \mathbf{x}) + D^{-1}(D\Delta \mathbf{s}) = -\sqrt{\mu}(MD \mathbf{p}_x - D^{-1}\mathbf{p}_s),$$

és így az előző lineáris egyenletrendszer felhasználva a

$$\mathbf{p}_s = DMD \mathbf{p}_x,$$

adódik, ahol $D = \text{diag}(\mathbf{d})$ pozitív diagonális mátrix. Tehát a \mathbf{p} vektor az alábbi módon fejezhető ki

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s = (I + DMD) \mathbf{p}_x.$$

Mivel, esetünkben az $I + DMD$ mátrix pozitív definit

$$\mathbf{p}_x = (I + DMD)^{-1} \mathbf{p} \quad \text{és} \quad \mathbf{p}_s = DMD(I + DMD)^{-1} \mathbf{p},$$

adódik. Figyelembe véve a

$$\mathbf{d}^{-1}\Delta\mathbf{x} = \sqrt{\mu}\mathbf{p}_x, \quad \text{és} \quad \mathbf{d}\Delta\mathbf{s} = \sqrt{\mu}\mathbf{p}_s$$

összefüggéseket, kiszámolhatjuk az egyértelmű $\Delta\mathbf{x}$ és $\Delta\mathbf{s}$ csökkenési irányokat

$$\Delta\mathbf{x} = \sqrt{\mu}D(I + DMD)^{-1}\mathbf{p} \quad \text{és} \quad \Delta\mathbf{s} = \sqrt{\mu}MD(I + DMD)^{-1}\mathbf{p}.$$

Végezetül, az (SF) speciális iránykereső feladatra hivatkozva bevezethetjük a *Dikin-irányok* fogalmát.

3.4. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$ megoldás. Az (SF) speciális iránykereső feladat megoldását, a $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s})$ vektorokat, *Dikin-iránynak* nevezzük.

Mivel a Dikin-iránykereső feladat optimumáról megmutattuk, hogy negatív, (3.2), ezért a Dikin-irányok, csökkenési irányok. A levezetés során felhasználtuk a következő eredményt.

3.5. Feladat. Bizonyítsa be, hogy az $I + DMD$ mátrix pozitív definit, ahol M ferdén szimmetrikus, D pozitív diagonális és I az egység mátrix. Ez egyben azt is jelenti, hogy az $I + DMD$ mátrix reguláris, azaz invertálható.

A Dikin-irányokat ki lehet számolni egy másik képlettel is, amely nem használja az átskálázás vektorait.

3.6. Feladat. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$ megoldás. Jelölje X és S , az \mathbf{x} és \mathbf{s} vektorokból készített pozitív diagonális mátrixokat, ekkor a $\Delta\mathbf{x}$ és $\Delta\mathbf{s}$ Dikin-irányok az alábbi módon is kiszámolhatók

$$\Delta\mathbf{x} = -(S + XM)^{-1} \frac{\mathbf{x}^2\mathbf{s}^2}{\|\mathbf{x}\mathbf{s}\|}, \quad \text{és} \quad \Delta\mathbf{s} = -M(S + XM)^{-1} \frac{\mathbf{x}^2\mathbf{s}^2}{\|\mathbf{x}\mathbf{s}\|}.$$

A Dikin-irányok fontos tulajdonságát fejezi ki a következő állítás, amelynek az igazolását az olvasóra bizzuk.

3.7. Feladat. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$ megoldás. Legyenek továbbá a $\Delta\mathbf{x}$ és $\Delta\mathbf{s}$ Dikin-irányok. Ekkor

$$\Delta\mathbf{x}^T \Delta\mathbf{s} = 0,$$

teljesül és természetesen az átskálázás is megőrzi ezt a tulajdonságot, azaz

$$\mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s = 0.$$

3.2. Dikin-féle affin skálázású algoritmus

Az eddigiek során megmutattuk, hogy a Dikin-ellipszoid segítségével elkészíthető egy iránykereső segédfeladat, amelynek egyértelmű megoldása, – ahogyan azt az előző részben bemutattuk – könnyen kiszámolható. Egy felmerülő kérdés maradt: megléphető-e a teljes lépés a Dikin-irányban vagy annak érdekében, hogy a poliéder belsejében maradjunk és az algoritmus menetét jól tudjuk elemezni, rövidíteni kell a lépéshosszt?

Először, megfogalmazzuk a Dikin-féle affin skálázású algoritmust, a centrális út egy környezetét, és igazolunk három lemmát.

Dikin-féle affin skálázású algoritmus

Bemenő adatok:

megállási paraméter: $\varepsilon > 0$

lépéshossz paraméter: α

induló megoldás: $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{F}^0$, $s(\mathbf{x}^0) > \mathbf{0}$,

kezdeti dualitásrés: $\mathbf{x}^T \mathbf{s}$.

Begin

Legyen $\mathbf{x} := \mathbf{x}^0$, $\mathbf{s} := s(\mathbf{x})$;

while $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \geq \varepsilon$ **do**

begin

$\Delta \mathbf{x} := -(S + XM)^{-1} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}^2}{\|\mathbf{x} \mathbf{s}\|}$;

$\mathbf{x} := \mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}$, $\mathbf{s} := s(\mathbf{x})$;

Számítsuk ki az $\mathbf{x}^T \mathbf{s}$ dualitásrészt;

end

end.

Mivel tudjuk, hogy a centrális út létezik és egyértelmű, szeretnénk mérni egy-egy megoldás távolságát a centrális úttól, ezért bevezetjük az un. *centralitás mértékét*.

3.8. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = s(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. Defináljuk a

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\max_i (x_i \cdot s_i)}{\min_i (x_i \cdot s_i)} = \frac{\max_i u_i^2}{\min_i u_i^2} \geq 1$$

számot. Azt mondjuk, hogy a $\delta(\mathbf{x})$ az $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ megoldás *centralitás mértéke*.

A $\delta(\mathbf{x})$ valóban az $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ megoldás távolságát méri a centrális úttól, hiszen $\delta(\mathbf{x}) = 1$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{x} \mathbf{s} = \mu \mathbf{e}$, vagyis, ha a megoldásunk a centrális úton van.

Világos az is, hogy minél távolabb kerülünk a centrális úttól, annál nagyobb lesz a $\delta(\mathbf{x})$ értéke.

3.9. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. A centrális út τ -környezetén a következő halmazzt értjük

$$\mathcal{C}_\tau = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0 : \delta(\mathbf{x}) \leq \tau\},$$

ahol $\tau > 1$, valós szám.

A $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$ feltételből, az \mathbf{u} vektor definícióját is figyelembe véve a következőt kapjuk

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{\max \mathbf{u}^2}{\min \mathbf{u}^2} \leq \tau \iff \max \mathbf{u}^2 \leq \tau \min \mathbf{u}^2.$$

Ebből az összefüggésből következik, hogy létezik $\tau_1, \tau_2 > 0$ és $\tau_2 = \tau \tau_1$, amelyekre

$$\tau_1 \mathbf{e} \leq \mathbf{u}^2 \leq \tau_2 \mathbf{e}, \quad (3.3)$$

teljesül.

Később szükségünk lesz a következő állításra.

3.10. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. Legyen \mathbf{p}_x és \mathbf{p}_s az átskálázott Dikin-irányok, amelyeket a \mathbf{p} vektorból számoltunk ki. Ekkor a

$$\|\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s\|^2 = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{4} \quad (3.4)$$

egyenlőtlenségek teljesülnek.

Bizonyítás. Írjuk fel a $\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s$ szorzatot a következő alakban

$$\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s = \frac{1}{4} ((\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s)^2 - (\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s)^2)$$

ekkor triviális alsó és felső becslések nyerhetők

$$-\frac{1}{4}(\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s)^2 \leq \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \leq \frac{1}{4}(\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s)^2,$$

vagyis

$$-\frac{1}{4}((\mathbf{p}_x)_i - (\mathbf{p}_s)_i)^2 \leq (\mathbf{p}_x)_i (\mathbf{p}_s)_i \leq \frac{1}{4}((\mathbf{p}_x)_i + (\mathbf{p}_s)_i)^2,$$

tehát

$$\max_i |(\mathbf{p}_x)_i (\mathbf{p}_s)_i| \leq \max \left\{ \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n ((\mathbf{p}_x)_i + (\mathbf{p}_s)_i)^2, \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n ((\mathbf{p}_x)_i - (\mathbf{p}_s)_i)^2 \right\},$$

így

$$\|\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\|_\infty \leq \max \left\{ \frac{1}{4} \|\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s\|^2, \frac{1}{4} \|\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s\|^2 \right\}.$$

Mivel a \mathbf{p}_x és a \mathbf{p}_s vektorok ortogonálisak, ezért $\|\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s\|^2 = \|\mathbf{p}_x - \mathbf{p}_s\|^2$, tehát az előző egyenlőtlenség alapján

$$\|\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s\|^2 = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{4},$$

adódik. ■

Az előző lemmát egyszerűbb feltevések mellett is igazolni lehet, hiszen nem az a lényeges ebben a lemmában, hogy átskálázott Dikin-irányokról van szó, hanem az, hogy a $\mathbf{p}, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_s \in \mathbb{R}^n$ vektorokra a következő két tulajdonság teljesül

$$\mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s.$$

Ezek a feltételek mellett is igaz a 3.10. Lemma.

Többször szükségünk lesz az új megoldás és a hozzá tartozó eltérés vektoroknak a Hadamard-szorzatára (koordinátánkénti szorzatára).

3.11. Lemma. *Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$ megoldás, valamint $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Az (SF) segédfeladatból kiszámított Dikin-irányokat jelölje $\Delta \mathbf{x}$ és $\Delta \mathbf{s}$, az új megoldás legyen $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}$ és a hozzá tartozó eltérés vektor pedig $\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}$. Ekkor*

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right). \quad (3.5)$$

Bizonyítás. Mivel az

$$\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x} = \mathbf{d} \sqrt{\mu} \mathbf{u} + \alpha \mathbf{d} \sqrt{\mu} \mathbf{p}_x = \sqrt{\mu} \mathbf{d} (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{p}_x)$$

és

$$\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s} = \sqrt{\mu} \mathbf{d}^{-1} (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{p}_s),$$

ezért

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ &= (\mathbf{x} + \alpha \Delta \mathbf{x}) (\mathbf{s} + \alpha \Delta \mathbf{s}) = \mu (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{p}_x) (\mathbf{u} + \alpha \mathbf{p}_s) \\ &= \mu (\mathbf{u}^2 + \alpha (\mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s) \mathbf{u} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s). \end{aligned}$$

Figyelembe véve a

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_x + \mathbf{p}_s = -\frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|}$$

összefüggést,

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right)$$

adódik. ■

A 3.11. Lemmában szereplő (3.5) egyenlőség jobboldalán álló zárójeles kifejezés első két tagja segítségével a következő $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt definiálhatjuk

$$f(t) = t - \alpha \frac{t^2}{\|\mathbf{u}^2\|}. \quad (3.6)$$

Igazolhatjuk a következő lemmát.

3.12. Lemma. Legyen adott az $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ függvény a (3.6) képlettel. Ha

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2t},$$

akkor az f függvény monoton nő a $[0, t]$ intervallumon.

Bizonyítás. Deriváljuk a függvényt és elemezzük a monoton növekedés feltételét

$$f'(t) = 1 - 2\alpha \frac{t}{\|\mathbf{u}^2\|} \geq 0,$$

teljesül, a lemma feltételében megadott α értékre. ■

3.3. Megengedett lépéshossz

Folytatjuk a Dikin-féle affin skálázású algoritmus elemzését. Definiáljuk a megengedett lépéshosszt, majd pedig meghatározzuk azt az α értéket, amellyel az algoritmus haladni fog. Végül az algoritmus komplexitás elemzése következik.

3.13. Definíció. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás, valamint $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Az (SF) segédfeladatból kiszámított Dikin-irányokat jelölje $\Delta\mathbf{x}$ és $\Delta\mathbf{s}$, az új megoldás legyen $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha \Delta\mathbf{x}$ és a hozzá tartozó eltérés vektor pedig $\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha \Delta\mathbf{s}$. Ekkor az α értéket *megengedett lépéshossznak* nevezzük, ha az

$$\mathbf{x} + \alpha \Delta\mathbf{x} > \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad \mathbf{s} + \alpha \Delta\mathbf{s} > \mathbf{0}.$$

Induljunk ki abból az állapotból, hogy egy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ megoldásunk adott az (SP) feladatra és tegyük fel, hogy $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$, azaz az \mathbf{x} megoldás a centrális út τ -környezetében van, ahol $\tau > 1$. A τ -környezetet megfogalmazzuk az átskálázott vektorokra is, a (3.3) egyenlőtlenség segítségével. Számoljuk ki a Dikin-irányokat, majd határozzuk meg az α lépéshosszt, úgy, hogy az új megoldás $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$ is a centrális út τ -környezetében legyen.

A következő tételben korlátot adunk a megengedett lépéshosszra, amelyek biztosítják a $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$ teljesülését.

3.14. Tétel. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. Továbbá, legyen $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\tau \in \mathbb{R}$, $\tau > 1$ és tegyük fel, hogy $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$. Az (SF) segédfeladatból kiszámított Dikin-irányokat jelölje $\Delta\mathbf{x}$ és $\Delta\mathbf{s}$, az új megoldás legyen $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \alpha \Delta\mathbf{x}$ és a hozzá tartozó eltérés vektor pedig $\mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \alpha \Delta\mathbf{s}$. Ekkor bármely α lépéshossz amely kielégíti az

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2} \quad \text{és} \quad \alpha < \min \left\{ \frac{4\tau_1}{\|\mathbf{u}^2\|}, \frac{\tau_1}{2\|\mathbf{u}^2\|} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau}{\tau_2^2}} \right) \right\} \quad (3.7)$$

egyenlőtlenségeket, megengedett lépéshossz és az $\mathbf{x}^+ := \mathbf{x} + \alpha \Delta\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ vektorra $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$ teljesül.

Bizonyítás. Mivel az $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ megoldásra teljesül a $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$, ezért (3.3) egyenlőtlenség teljesül az átskálázott vektorokra, azaz létezik $\tau_1, \tau_2 > 0$ és $\tau_2 = \tau\tau_1$, amelyekre

$$\tau_1 \mathbf{e} \leq \mathbf{u}^2 \leq \tau_2 \mathbf{e},$$

igaz. Tekintsük a 3.11. Lemmában szereplő (3.5) egyenlőség, átalakított formáját, azaz

$$(\mathbf{u}^+)^2 = \frac{\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+}{\mu} = \left(\mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right).$$

Az előző képlet azt mutatja, hogy az új megoldás átskálázott változata, az $(\mathbf{u}^+)^2$ előállítható az előző megoldás átskálázott változatából és a kiszámított Dikin-irányokból és az α lépéshosszból. Az $(\mathbf{u}^+)^2$ vektort meghatározó kifejezésben egyedül az α a változó. Nyilvánvaló, hogy $\alpha = 0$ visszaadja az előző átskálázott megoldást, amely egy pozitív vektor volt. Az $\alpha > 0$ fejezi azt ki, hogy a Dikin-irányok segítségével, új, a régitől különböző megoldást állítottunk elő. Feladatunk, meghatározni az α számra olyan felső korlátot, amelyik mellett az \mathbf{x}^+ új megoldásra az elvárások teljesülnek.

Alkalmazzuk a 3.12. Lemmát, figyelembe véve a (3.3) korlátot, azaz a $\tau_2 > 0$ korlátot. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}$$

esetén az f függvény monoton nő a $[0, \tau_2]$ intervallumban.

Az $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{C}_\tau$ teljesülésének az igazolásához, a következő lépéseken keresztül jutunk el:

1. A (3.3) vektor egyenlőtlenség minden koordinátájára alkalmazzuk a (3.6) feltétellel definiált f függvényt, figyelembe véve, hogy már igazoltuk az f monotonitását a $[0, \tau_2]$ intervallumban. Az f függvény monotonitásának köszönhetően, a transzformált koordinátákra is teljesül az eredeti reláció. Végül az előálló egyenlőtlenséget olyan formára hozzuk, hogy a középső tagja $\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+$ legyen.
2. Az $\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+$ vektorra előállított alsó és felsőkorlát, a centralitás mérték definíciója szerint (3.8. Definíció) és a centrális út τ -környezetének, a \mathcal{C}_τ halmaznak a definíciója alapján a $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$ pontosan akkor teljesül, ha az alsó korlát τ -szorosa nagyobb vagy egyenlő lesz, a felső korlátnál. Ebből az összefüggésből, meghatározható lesz egy újabb korlát az α lépéshossz értékére.

1. lépés: A (3.3) vektor egyenlőtlenség minden koordinátájára alkalmazzuk az f függvényt, ekkor

$$\left(\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} \leq \mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} \leq \left(\tau_2 - \alpha \frac{\tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e}$$

adódik és hozzáadva az egyenlőtlenséghez a $\alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s$ vektort, majd $\mu > 0$ számmal szorozva és figyelembe véve, hogy a középső tag

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right)$$

lesz, a

$$\mu \left(\left(\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right) \leq \mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ \leq \mu \left(\left(\tau_2 - \alpha \frac{\tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right)$$

egyenlőtlenséget nyerjük. A bal oldalon álló vektornak szigorúan pozitívnak kell lennie, ahhoz, hogy az $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{F}^0$ teljesülhessen.

2. lépés: Az előző egyenlőtlenség pontosan akkor fejezi ki azt, hogy $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$, ha az alsó korlát τ -szorososa nagyobb vagy egyenlő lesz, a felső korlátnál,

$$\tau\mu \left(\left(\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right) \geq \mu \left(\left(\tau_2 - \alpha \frac{\tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right)$$

akkor $\delta(\mathbf{x}^+) \leq \tau$ igaz lesz. Az előző, $\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+$ vektorra adott egyenlőtlenség alsó és felső korlátját figyelembe véve, a következő összefüggés adódik

$$\tau\mu \left(\left(\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right) > \mu \left(\left(\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right), \quad (3.8)$$

amelyik azért lesz már szigorú egyenlőtlenség, mert a jobb oldalon álló vektor, a baloldalon álló – elvárásaink szerint pozitív – vektor τ -szorososa, ahol $\tau > 1$. Az előző egyenlőtlenséget egyszerűsíthetjük, hiszen a jobb oldalt kivonva, majd $\tau - 1 > 0$ számmal osztva az egyenlőtlenséget

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ \geq \mu \left(\left(\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right) \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right) > \mathbf{0} \quad (3.9)$$

az α lépéshossz megengedettségét kikötő egyenlőtlenséget kaptunk. Igaz az α értékére még nem állítottunk elő korlátot.

Végezetül a (3.8) egyenlőtlenségből meghatározhatjuk az α lépéshossz értékét. A (3.8) egyenlőtlenséget osszuk el $\mu > 0$ számmal, majd szorozzuk be a baloldalon álló kifejezést, a τ számmal, ekkor a következő egyenlőtlenséget kapjuk

$$\tau\tau_1 \mathbf{e} - \alpha \frac{\tau\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \mathbf{e} + \tau\alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s > \tau_2 \mathbf{e} - \alpha \frac{\tau_2^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \mathbf{e} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s,$$

$\tau\tau_1 = \tau_2$, $\alpha > 0$, így ezekkel egyszerűsíthetünk. Átrendezés után elegendő a következőt bizonyítani:

$$\frac{\tau_2^2 - \tau\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \mathbf{e} + \alpha(\tau - 1) \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s > \mathbf{0}.$$

Mivel $\tau_2^2 - \tau\tau_1^2 = (\tau - 1)\tau_1\tau_2$ és $\tau > 1$, ezért $(\tau - 1) > 0$ számmal eloszthatjuk az egyenlőtlenséget és így, az alábbi egyszerűbb egyenlőtlenséget nyerjük

$$\frac{\tau_1\tau_2 \mathbf{e}}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s > \mathbf{0}. \quad (3.10)$$

A baloldalon álló kifejezés első tagja biztosan pozitív, míg a második tagban szereplő $\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s$ vektor nyilván tartalmazhat negatív koordinátát. A negatív koordináták közül a legkiseb-bet szeretnénk megbecsülni, majd pedig ennek segítségével felsőkorlátot adni az $\alpha > 0$ lépéshossz értékére.

Felhasználjuk a 3.10. Lemmában szereplő (3.4) becslést, – a $\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s$ vektor végtelen normájára adott felső korlátot, – a második tagra alsó korlátot adhatunk. Az így módosított, gyengébb egyenlőtlenségtől is pozitivitást várunk el, azaz

$$\frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} \mathbf{e} + \alpha \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s > \frac{\tau_1\tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} \mathbf{e} - \alpha \frac{\alpha \|\mathbf{p}\|^2}{4} \mathbf{e} > \mathbf{0}.$$

Ezt kiírhatjuk koordinátánként

$$\frac{\tau_1 \tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} - \frac{\alpha \|\mathbf{p}\|^2}{4} > 0 \quad (3.11)$$

és felhasználva a \mathbf{p} vektor definícióját, egyszerűen adhatunk felső korlátot a \mathbf{p} vektor normájára

$$\|\mathbf{p}\| = \left\| \frac{\mathbf{u}^3}{\|\mathbf{u}^2\|} \right\| \leq \|\mathbf{u}\|_\infty \left\| \frac{\mathbf{u}^2}{\|\mathbf{u}^2\|} \right\| = \|\mathbf{u}\|_\infty \leq \sqrt{\tau_2},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség abból adódik, hogy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ pont a \mathcal{C}_τ halmaz eleme. Utolsó becslésünket felhasználva a (3.11) egyenlőtlenségtől is egy szűkebbet követelünk meg, azaz

$$\frac{\tau_1 \tau_2}{\|\mathbf{u}^2\|} - \frac{\alpha \tau_2}{4} > 0,$$

összefüggést kapjuk, amelyből

$$\alpha < \frac{4\tau_1}{\|\mathbf{u}^2\|} \quad (3.12)$$

adódik.

Tekintettel arra, hogy a (3.9) egyenlőtlenség α lépéshosszra nézve konkáv másodfokú függvényt ad, célszerű lesz összehasonlítani az abból adódó korláttal az előzőt. A (3.9) egyenlőtlenségből, – a (3.8) egyenlőtlenséghez hasonlóan – a $\mathbf{p}_x \mathbf{p}_s$ vektor becslésével, több elemi lépés után, levezethető a következő kvadratikus egyenlőtlenség

$$\tau_1 - \alpha \frac{\tau_1^2}{\|\mathbf{u}^2\|} - \alpha^2 \frac{\tau_2}{4} > 0.$$

Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\alpha_1 = \frac{\tau_1}{2\|\mathbf{u}^2\|} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} \right) \quad \text{és} \quad \alpha_2 = \frac{\tau_1}{2\|\mathbf{u}^2\|} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} \right).$$

Ebből, a gyök alatt lévő második tagot, a $\tau_1 \tau_2$ definíciójának a felhasználásával átírhatjuk az alábbi alakra

$$\alpha_2 = \frac{\tau_1}{2\|\mathbf{u}^2\|} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau}{\tau_2^2}} \right).$$

Nyilván

$$0 < \alpha < \alpha_2 = \frac{\tau_1}{2\|\mathbf{u}^2\|} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau}{\tau_2^2}} \right), \quad (3.13)$$

lesz a (3.9) egyenlőtlenségből nyerhető pontos felső korlát.

A (3.12) és (3.13) felsőkorlátok közül a kisebb, megfelelő lesz az α lépéshossz meghatározására. ■

Érdemes az α lépéshosszra kapott (3.12) és (3.13) felsőkorlátokat összehasonlítani. Vizsgáljuk meg azt az esetet, hogy az egyszerűbb számolással kapott (3.12) felsőkorlát, milyen

feltétel mellett lesz kisebb vagy egyenlő a másikkal, azaz azt tesszük fel, hogy

$$\frac{4\tau_1}{\|\mathbf{u}^2\|} \leq \frac{\tau_1}{2\|\mathbf{u}^2\|} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{\tau}{\tau_2^2}} \right).$$

Egyszerű számítás után azt kapjuk, hogy az előző egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha

$$48\tau_2^2 \leq \tau,$$

összefüggés igaz.

Ha $\tau = 2$ és $\tau_1 = \frac{1}{10}$ akkor $\tau_2 = \frac{1}{5}$ és így az előző egyenlőtlenség teljesül.

3.4. Dikin-féle affin skálázású algoritmus komplexitása

Ebben a részben először megvizsgáljuk megengedett lépéshossz esetén a dualitás rés csökkenésének a mértékét. Ezek után a 3.14. Tételben adott korlátok mellett megmutatjuk, hogy iterációról-iterációra a Dikin-féle affin skálázású algoritmus belsőpontokon halad. Végül speciálisan megválasztott lépéshossz esetén igazoljuk az algoritmus polinomiális komplexitását.

3.15. Tétel. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s} = \mathbf{s}(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$ megoldás. Továbbá, legyen $\alpha \in \mathbb{R}_+$ megengedett lépéshossz, azaz

$$\mathbf{x}^+ := \mathbf{x} + \alpha\Delta\mathbf{x} > \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{s}^+ := \mathbf{s} + \alpha\Delta\mathbf{s} > \mathbf{0}$$

teljesül, ahol $\Delta\mathbf{x}$ és $\Delta\mathbf{s}$ jelöli a Dikin-irányokat. Ekkor

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) \mathbf{x}^T \mathbf{s}.$$

Bizonyítás. A 3.11. Lemma és a (3.5) egyenlőség alapján

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 \mathbf{p}_x \mathbf{p}_s \right),$$

adódik és ekkor a két vektor skaláris szorzata

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = \mu \left(\mathbf{e}^T \mathbf{u}^2 - \alpha \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u}^4}{\|\mathbf{u}^2\|} + \alpha^2 \mathbf{p}_x^T \mathbf{p}_s \right) = \mu (\|\mathbf{u}\|^2 - \alpha \|\mathbf{u}^2\|),$$

lesz, ahol felhasználtuk a \mathbf{p}_x és \mathbf{p}_s vektorok ortogonalitását, valamint elvégeztük a kijelölt műveleteket. A Cauchy–Schwarz–Bunyakovszkij egyenlőtlenség alapján

$$\|\mathbf{u}^2\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \|\mathbf{e}\| \|\mathbf{u}^2\| \geq \frac{\mathbf{e}^T \mathbf{u}^2}{\sqrt{n}} = \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{\sqrt{n}},$$

teljesül, ezért

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = \mu (\|\mathbf{u}\|^2 - \alpha \|\mathbf{u}^2\|) \leq \mu \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) \|\mathbf{u}\|^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}} \right) \mathbf{x}^T \mathbf{s},$$

adódik és pontosan ezt kellett igazolnunk. ■

Most már készen állunk arra, hogy egy speciális τ környezet paraméter és α megengedett lépéshossz esetén igazoljuk azt, hogy az \mathbf{x}^+ szigorúan megengedett vektor lesz.

3.16. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$ kezdeti induló megoldás. Továbbá, legyen

$$\tau = \min\{\delta(\mathbf{x}_0), 2\} \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{1}{\tau\sqrt{n}},$$

ahol n a feladat változóinak a száma. Ha $n \geq 2$, akkor a Dikin-féle affin skálázású algoritmus által előállított pontsorozat az (SP) feladat, szigorúan megengedett megoldásai.

Bizonyítás. Be kell látnunk, hogy a lemma feltételei alapján, az α lépéshosszra teljesülnek a 3.14. Tételben megadott korlátok és így a Dikin-féle affin skálázású algoritmus által előállított pontsorozat, valóban, az (SP) feladat, szigorúan megengedett megoldásai. Igazolnunk kell tehát, azt, hogy

$$\alpha \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2} \quad \text{és} \quad \alpha < \frac{4\tau_1}{\|\mathbf{u}^2\|}.$$

Mivel $n \geq 2$, ezért

$$\alpha = \frac{1}{\tau\sqrt{n}} = \frac{\tau_1}{\tau_2\sqrt{n}} \leq \frac{\tau_1\sqrt{n}}{2\tau_2} = \frac{\|\tau_1\mathbf{e}\|}{2\tau_2} \leq \frac{\|\mathbf{u}^2\|}{2\tau_2}.$$

Másfelől,

$$\frac{4\tau_1}{\|\mathbf{u}^2\|} \geq \frac{4\tau_1}{\|\tau_2\mathbf{e}\|} = \frac{4\tau_1}{\tau_2\sqrt{n}} = \frac{4}{\tau\sqrt{n}} > \alpha$$

adódik, azaz a lemma feltételeiben megadott lépéshossz megengedett. ■

Ennyi előkészítés után igazolhatjuk, hogy a Dikin-féle affin skálázású algoritmus lépésszáma, a feladat méretének és az induló megoldás adataiból számolt értékek és a pontossági paraméter polinomjával korlátozható.

3.17. Tétel. Legyen adott az (SP) feladat, $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{F}^0$, és $\mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(x) > \mathbf{0}$ kezdeti induló megoldás. Továbbá, legyen

$$\tau = \min\{\delta(\mathbf{x}_0), 2\} \quad \text{és} \quad \alpha = \frac{1}{\tau\sqrt{n}},$$

ahol n a feladat változóinak a száma. Ha $n \geq 2$, akkor a Dikin-féle affin skálázású algoritmus az (SP) feladatot legfeljebb

$$\lceil \tau n \log \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \rceil$$

lépésben megoldja, azaz talál egy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ pontot, amelyre $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$ és $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Az $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{F}^0$ induló megoldásra $\delta(\mathbf{x}^0) \leq \tau$ összefüggés teljesült és a célfüggvény értéke $\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0$ volt. A tétel feltételei és az előző lemma alapján az α megengedett lépéshossz, tehát a Dikin-féle affin skálázású algoritmus az (SP) feladatnak egy

$$\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k, \dots$$

szigorúan megengedett pontsorozatát generálja, amelyek esetén a célfüggvényértékek, a 3.15. Tétel alapján, monoton csökkenő sorozatot alkotnak

$$\mathbf{x}_0^T \mathbf{s}_0, \mathbf{x}_1^T \mathbf{s}_1, \mathbf{x}_2^T \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{x}_k^T \mathbf{s}_k, \dots$$

lesz és

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{s}_k \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right) \mathbf{x}_{k-1}^T \mathbf{s}_{k-1}.$$

Tehát az α megengedett lépéshosszt behelyettesítve, a dualitás rész értékére a k . iteráció után, a következő alsó korlátot kapjuk

$$\left(1 - \frac{1}{n\tau}\right)^k \mathbf{q}^T \mathbf{x}^0,$$

vagyis be kell látnunk, hogy $k = \lceil \tau n \log \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon} \rceil$ esetén

$$\left(1 - \frac{1}{n\tau}\right)^k \mathbf{q}^T \mathbf{x}^0 \leq \varepsilon$$

teljesül. Vegyük a logaritmusát az előző kifejezésnek, ekkor

$$k \log \left(1 - \frac{1}{n\tau}\right) + \log(\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0) \leq \log \varepsilon.$$

Mivel bármely

$$a < 1 \text{ értékre } -\log(1 - a) \leq a,$$

teljesül, ezért

$$\log \left(1 - \frac{1}{n\tau}\right) \geq -\frac{1}{n\tau}.$$

Vagyis

$$\frac{k}{n\tau} \geq \log \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0}{\varepsilon}.$$

Ebből következik a tétel állítása. ■

Illusztráljuk a Dikin-féle affin skálázású algoritmust egy példán.

3.18. Példa. Tekintsük a következő ferdén szimmetrikus lineáris programozási feladatot:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min 5z_5 : \\ \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}, \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

Természetesen $\mathbf{z} = \mathbf{e}$ és $s(\mathbf{z}) = \mathbf{e}$ megoldása a feladatnak.

Megmutatható, hogy a $\bar{\mathbf{z}} = (3/2, 1, 3/4, 3/4, 0)^T$ megengedett megoldása a feladatnak és az $s(\bar{\mathbf{z}}) = (0, 0, 0, 0, 1)^T$ az eltérés változó. A feladat célfüggvényértéke $\mathbf{q}^T \bar{\mathbf{z}} = 0$, tehát a $\bar{\mathbf{z}}$ optimális megoldása a feladatnak, sőt

$$\bar{\mathbf{z}} + s(\bar{\mathbf{z}}) = (3/2, 1, 3/4, 3/4, 1)^T > \mathbf{0},$$

azaz a $(\bar{\mathbf{z}}, s(\bar{\mathbf{z}}))$ szigorúan komplementáris optimális megoldás.

Legyen $\tau = 2$ és $n = 5$, ekkor az algoritmus legfeljebb

$$\left\lceil 10 \log \frac{5}{\varepsilon} \right\rceil$$

iterációban megoldja a lineáris programozási feladatot. Ha $\varepsilon = 10^{-2}$ akkor

$$\log \frac{5}{\varepsilon} = \log 500 = 6.2146,$$

és így az iterációk számára 63 adódik, mint felsőkorlát. Amennyiben a megadott ε pontossággal oldjuk meg a feladatot akkor 58 iterációra lesz szükségünk. A megoldásunk

$$\hat{\mathbf{z}} = (1.5985, 0.0025, 0.7998, 0.8005, 0.0020)^T \quad \text{és} \quad \mathbf{q}^T \hat{\mathbf{z}} = z_5 = 0.0020$$

lesz és az eltérés változónk

$$s(\hat{\mathbf{z}}) = (0.0012, 0.8005, 0.0025, 0.0025, 1.0000)^T.$$

Megfigyelhető, hogy a z_2 és a z_5 változók értéke kicsi lesz, ebből arra következtethetünk, hogy a $B = \{1, 3, 4\}$ és az $N = \{2, 5\}$ lesz.

3.5. A (B, N) partíció meghatározása a centrális út környezetében

Legyen adott $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s}^0 > \mathbf{0}$, amelyek esetén $(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{s}^0 = \mathbf{q}^T \mathbf{x}^0 = n\mu^0 = n$ teljesül, azaz a $\mu^0 = 1$. Legyen $\tau = 2$, ekkor a Dikin-féle affin skálázású algoritmus a ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatnak $\lceil 2n \log \frac{n}{\varepsilon} \rceil$ iterációban előállít egy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$: $\delta(\mathbf{x}) \leq 2$ és $\mathbf{q}^T \mathbf{x} \leq \varepsilon$ tulajdonságú pontját.

3.19. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat és $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s} > 0$, amelyekre $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$. Ekkor

$$\begin{aligned} x_i &\geq \frac{\sigma_{SP}}{\tau n} & i \in B, & & x_i &\leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\sigma_{SP}} & i \in N, \\ s_i &\leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\sigma_{SP}} & i \in B, & & s_i &\geq \frac{\sigma_{SP}}{\tau n} & i \in N, \end{aligned}$$

ahol σ_{SP} a feladat kondíciószáma.

Bizonyítás. Mivel a $\tau > 1$, tehát létezik $\tau_1, \tau_2 > 0$, hogy $\tau_2 = \tau\tau_1$ és $\tau_1 \leq x_i s_i \leq \tau_2$ teljesül bármely i indexre. Legyen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{F}^*$, $\tilde{\mathbf{s}} \geq \mathbf{0}$ olyan, amelyre \tilde{x}_i maximális, azaz $\tilde{x}_i \geq \sigma_{SP} > 0$, ezért $i \in B$. Felhasználva az $\tilde{\mathbf{x}}$ komplementaritását és az $(\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}})^T (\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}) = 0$ egyenlőséget, adódik, hogy $\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{s} + \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{x}^T \mathbf{s}$. Figyelembe véve a vektorok nem negativitását, kapjuk a lemma harmadik állítását

$$s_i \tilde{x}_i \leq \mathbf{s}^T \tilde{\mathbf{x}} \leq \tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{s} + \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{x}^T \mathbf{s} \quad \text{tehát} \quad s_i \leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\tilde{x}_i} \leq \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\sigma_{SP}},$$

hiszen $i \in B$ esetén $\tilde{x}_i > 0$. Ezt az eredményt és a $\tau_1 \leq x_i s_i \leq \tau_2$ egyenlőtlenséget felhasználva, egyszerűen adódik az első egyenlőtlenség

$$\tau_1 \leq x_i s_i \leq x_i \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\tilde{x}_i} \leq x_i \frac{n\tau_2}{\sigma_{SP}} \quad \text{tehát} \quad x_i \geq \frac{\tau_1 \sigma_{SP}}{n \tau_2} = \frac{\sigma_{SP}}{n \tau}.$$

A második és a negyedik állítás hasonlóan bizonyítható. ■

Most pedig készen állunk arra, hogy a centrális út egy \mathcal{C}_τ környezetében lévő pontok alapján elkészítsük a (B, N) partíciót.

3.20. Lemma. Legyen adott az (SP) feladat és $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s} > 0$, amelyekre $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau$. Ha

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s} \leq \frac{\sigma_{SP}^2}{\tau n},$$

akkor a (B, N) partíciója az (SP) feladatnak a következő módon kapható meg

$$B := \{i : x_i > s_i\} \quad \text{és} \quad N := \{i : x_i < s_i\}.$$

Bizonyítás. A kicsi és nagy változókat szét tudjuk választani, ha

$$\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{s}}{\sigma_{SP}} < \frac{\sigma_{SP}}{\tau n}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{x}^T \mathbf{s} < \frac{\sigma_{SP}^2}{\tau n}.$$

Tehát a B és N halmazok jól definiáltak, és az indexhalmaz partícióját adják (előző lemma). ■

Az előző lemma következményét egy feladatban fogalmazzuk meg, amelynek a bizonyítását az olvasóra bízunk.

3.21. Feladat. Legyen adott az (SP) feladat és $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s}^0 > 0$, melyekre $\delta(\mathbf{x}^0) \leq \tau$ és $(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{s}^0 = n$, $\tau = 2$. Ekkor a Dikin-féle affin skálázású algoritmus a ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladat esetén

$$\left\lceil 2n \log \frac{2n^2}{\sigma_{SP}^2} \right\rceil$$

lépésben megtalál egy olyan $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ megoldást, amely esetén (B, N) partíciót meg tudjuk határozni.

Végezetül az (SP) feladatnak egy nagyon speciális esetét vizsgáljuk meg.

3.22. Állítás. Legyen $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ az (SP) feladat egyetlen optimális megoldása pontosan akkor, ha $\mathbf{q} > 0$. Ez az eset pontosan akkor fordul elő, ha $B = \emptyset$.

Bizonyítás. Ha $B = \emptyset$, akkor $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ optimális, sőt szigorúan komplementáris is az $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ mellett, azaz $s(\mathbf{x}) = \mathbf{q} > 0$ kell hogy teljesüljön.

Másfelől $s(\mathbf{0}) = \mathbf{q}$ és $s(\mathbf{0}) > 0$ miatt $\mathbf{q} > 0$, így $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ egyértelmű optimum. ■

4. fejezet

Erősen polinomiális kerekítési eljárás

Az eddigiek során beláttuk, hogy a belsőpontos feltevés mellett, a Dikin-féle affin skálázású algoritmusra, polinomiális iteráció számban előállíthatunk egy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számítási pontossági paraméterhez, egy ún. ε -optimális megoldást.

A belsőpontos módszerek lineáris programozási feladatpárra általában ε -optimális megoldást állítanak elő polinomiális iteráció számban. Sokan úgy gondolják, hogy a belsőpontos módszerek – elméletileg is alkalmatlanok – pontos optimális megoldás előállítására. Ebben a fejezetben, ezt a tévhitet cáfoljuk meg, az ún. *kerekítési eljárás* megadásával és működésének az igazolásával.

A kerekítési eljárásunk független attól, hogy az ε -optimális megoldást milyen belsőpontos módszerrel állítottuk elő. Kizárólag attól függ, hogy az ε értékét megfelelően kicsire válasszuk illetve a centrális út környezetétől.

A kerekítési eljárásunk – általában nem optimális bázis megoldást állít elő, ezért nem keverendő az ún. *cross-over* módszerekkel, amelynek az a célja, hogy ε -optimális megoldásból, optimális bázis megoldást számoljon ki.

4.1. A kerekítési eljárás alkalmazásának a feltételei

Legyen adott az (SP) feladat és tekintsünk egy olyan $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, $s(\mathbf{x}) = \mathbf{s} > 0$ ε -optimális megoldást, amely esetén az ε kellően kicsi ahhoz, hogy a (B, N) partíció ismert legyen. Ebben az esetben az affin egyenletrendszer a következő alakú lesz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{s}_B \\ \mathbf{s}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{BB} & M_{BN} \\ M_{NB} & M_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_N \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

ahol az \mathbf{x} és \mathbf{s} az adott ε -optimális megoldásunk.

Az optimális megoldás meghatározása szempontjából két lényegesen eltérő esetünk van

1. $B = \emptyset$ és
2. $B \neq \emptyset$.

Az 1. esetet már tárgyaltuk korábban, és ekkor $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in \mathcal{F}^*$ és $\mathbf{s}^* = \mathbf{q}$. Tehát ebben az esetben nem szükséges kerekítési eljárást alkalmazni.

A $B \neq \emptyset$ esettel is foglalkoztunk már korábban és tudjuk \mathbf{x}^* és \mathbf{s}^* optimális megoldás párok esetén a következők biztosan teljesülnek

$$\mathbf{x}_N^* = \mathbf{0}, \quad \mathbf{s}_B^* = \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad \mathbf{q}_B = \mathbf{0}.$$

Az előző egyenletet felírhatjuk úgy, hogy a nagy változók a baloldalra kerülnek, míg a kicsi változók a jobb oldalra. Ekkor a következő egyenleteket kapjuk

$$M_{BB} \mathbf{x}_B = \mathbf{s}_B - M_{BN} \mathbf{x}_N, \quad (4.2)$$

ahol figyelembe vettük a $\mathbf{q}_B = \mathbf{0}$ tulajdonságot, illetve

$$\mathbf{s}_N - M_{NB} \mathbf{x}_B - \mathbf{q}_N = M_{NN} \mathbf{x}_N, \quad (4.3)$$

adódik. Ha az \mathbf{x}^* és \mathbf{s}^* optimális megoldás pár, szigorúan komplementáris is akkor az (4.2) a következő alakú lesz

$$M_{BB} \mathbf{x}_B^* = \mathbf{0}.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy az M_{BB} mátrix szinguláris, tehát az

$$M_{BB} \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{s}_B - M_{BN} \mathbf{x}_N, \quad (4.4)$$

egyenletnek végtelen sok $\boldsymbol{\zeta}$ megoldása van. Legyen a $\boldsymbol{\zeta}$ tetszőleges megoldása a (4.4) egyenletnek, ekkor definiálhatjuk, az $\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{x}_B - \boldsymbol{\zeta}$, $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ megoldást és $\bar{\mathbf{s}} = s(\bar{\mathbf{x}})$ eltérésváltozót, ahol

$$\mathbf{0} = \bar{\mathbf{s}}_B = M_{BB} \bar{\mathbf{x}}_B + M_{BN} \bar{\mathbf{x}}_N + \mathbf{q}_B = M_{BB} (\mathbf{x}_B - \boldsymbol{\zeta}).$$

Tehát az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ komplementáris megoldás, de nem feltétlenül pozitív vektorok.

Az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ pozitivitásához szükséges

$$\bar{\mathbf{x}}_B = \mathbf{x}_B - \boldsymbol{\zeta} > \mathbf{0},$$

illetve

$$\bar{\mathbf{s}}_N = M_{NB} \bar{\mathbf{x}}_B + M_{NN} \bar{\mathbf{x}}_N + \mathbf{q}_N = M_{NB} \mathbf{x}_B - M_{NB} \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{q}_N$$

az $M_{NB} \mathbf{x}_B + \mathbf{q}_N$ tagokat kifejezzük a (4.3) egyenletből és ekkor a következő kifejezést kapjuk

$$\bar{\mathbf{s}}_N = \mathbf{s}_N - M_{NN} \mathbf{x}_N - M_{NB} \boldsymbol{\zeta} > \mathbf{0}$$

ami egyben az optimalitás szükséges feltétele is, hiszen nemnegatív és komplementáris megoldás egyben optimális megoldás is. Tehát az $\varepsilon > 0$ alkalmas (kicsi) értéke mellett elő tudjuk állítani az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ vektort, az (SP) feladat optimális megoldását, egy $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s} = s(\mathbf{x}) > \mathbf{0}$, ε -optimális megoldásból.

Egyetlen kérdés maradt: milyen kicsire kell megválasztani ε értékét annak érdekében, hogy a vázolt eljárás működjön? Erre a választ a következő részben adjuk meg.

4.2. Pontos megoldás előállítása

Ebben a részben meghatározzuk azt az $\varepsilon > 0$ számot, amely nyilván kisebb lesz, mint az a szám, amely ahhoz szükséges, hogy a (B, N) partíciót megismerjük.

Vezessük be a következő jelöléseket

$$w := \|M\|_\infty, \quad B^* := \{i \in B : M_{Bi} \text{ oszlop vektor nem azonosan nulla}\}.$$

Definiáljuk a $\pi_B \in \mathbb{N}$ számot a következő módon

$$\pi_B := \begin{cases} 1, & \text{ha } B^* = \emptyset \\ \prod_{j \in B^*} \|M_{Bj}\|, & \text{különben} \end{cases}$$

A következő lemmában megadjuk azt az ε pontosságot, amely esetén az ε -optimális megoldásból, az előző részben leírt módon meghatározhatjuk a megfelelő ζ megoldást, amellyel módosítva a ε -optimális megoldást, előállíthatunk optimális megoldást. A kerekítési eljárás, erősen polinomiális eljárás, hiszen egy lineáris egyenletrendszer megoldásának előállítására vezethetjük vissza az optimális megoldás előállítását, ε -optimális megoldásból.

4.1. Lemma. *Legyen adott egy egész együtthatós (SP) feladat, $\mathbf{x} \in \mathcal{F}^0$ és $\mathbf{s} > \mathbf{0}$, melyekre $\delta(\mathbf{x}) \leq \tau = 2$. A definíciókból következik, hogy w , $|B|$, $\pi_B \geq 1$ számok. Ha*

$$\mathbf{x}^T \mathbf{s} \leq \varepsilon, \quad \text{ahol} \quad \varepsilon = \frac{\sigma_{SP}^2}{6n w^2 \sqrt{|B|} \pi_B},$$

akkor a kerekítési eljárás $O(|B^|^3)$ aritmetikai művelettel előállítja az (SP) feladat egy szigorúan komplementáris megoldását.*

Bizonyítás. A definíciókból közvetlenül következik, hogy w , π_B , $|B| \geq 1$. A pontunk a centrális út τ környezetében van, valamint

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{SP}^2}{6n w^2 \sqrt{|B|} \pi_B} < \frac{\sigma_{SP}^2}{2n} = \frac{\sigma_{SP}^2}{\tau n},$$

azaz az ε elegendően kicsi ahhoz, hogy a (B, N) partíciót meg tudjuk határozni. Mivel a partíció ismert, és $B \neq \emptyset$ miatt $\mathbf{q}_B = \mathbf{0}$, ezért a következő, a (4.4) lineáris egyenletrendszert fel tudjuk írni

$$M_{BB}\zeta = \mathbf{s}_B - M_{BN}\mathbf{x}_N.$$

Ennek az egyenletnek az egyik megoldása az \mathbf{x}_B vektor, az M_{BB} mátrixa szinguláris, tehát végtelen sok megoldása van a (4.4) lineáris egyenletrendszernek.

Megmutatjuk, hogy létezik olyan ζ megoldása is a (4.4) lineáris egyenletrendszernek, amelyre

$$\bar{\mathbf{x}}_B := \mathbf{x}_B - \zeta > \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \bar{\mathbf{s}}_N := \mathbf{s}_N - M_{NN}\mathbf{x}_N - M_{NB}\zeta > \mathbf{0} \quad (4.5)$$

is teljesül. Amennyiben $\bar{\mathbf{x}}_N := \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{s}}_B := \mathbf{0}$, akkor egyszerű számolással belátható, hogy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ szigorúan komplementáris megoldás.

Két eset lehetséges

1. $M_{BB} = 0$, és

2. $M_{BB} \neq 0$.

Az 1. esetben, az $M_{BB} = 0$ miatt válasszuk a $\xi = \mathbf{0}$ megoldást. Ebben az esetben (4.5) feltételben megfogalmazott első elvárás teljesül, míg a második a következőre redukálódik

$$\bar{\mathbf{s}}_N := \mathbf{s}_N - M_{NN}\mathbf{x}_N > \mathbf{0}.$$

Ha $M_{NN} = 0$, akkor az előző feltétel mindig igaz. Ellenkező esetben, $M_{NN} \neq 0$, elegendő az

$$\mathbf{s}_N \geq \frac{\sigma_{SP}}{2n} \mathbf{e} > M_{NN}\mathbf{x}_N$$

egyenlőtlenségeket belátni. Tudjuk, hogy $i \in N$ esetén $s_i \geq \frac{\sigma_{SP}}{\tau n}$, tehát az első teljesül. A végtelen norma tulajdonsága miatt

$$\|M_{NN}\mathbf{x}_N\|_\infty \leq \|M_{NN}\|_\infty \|\mathbf{x}_N\|_\infty \leq w \frac{\varepsilon}{\sigma_{SP}},$$

mivel $\|M_{NN}\|_\infty \leq \|M\|_\infty = w$. A lemma feltétele miatt

$$\varepsilon = \frac{\sigma_{SP}^2}{6nw^2\sqrt{|B|}\pi_B} < \frac{\sigma_{SP}^2}{2nw},$$

tehát

$$w \frac{\varepsilon}{\sigma_{SP}} < \frac{\sigma_{SP}}{2n},$$

azaz a második egyenlőtlenség is igaz, tehát $\bar{\mathbf{s}}_N > \mathbf{0}$.

A 2. esetben, az $M_{BB} \neq 0$, ekkor oldjuk meg a (4.4) lineáris egyenletrendszert Gauss–Jordan eliminációval (ez a kerekítési eljárás számítás szempontjából lényeges része).

Mivel az M_{BB} szinguláris mátrix, ezért határozzuk meg az M_{BB} maximális reguláris részmátrixát, és jelölje ezt a mátrixot az $M_{B_1B_2}$. Ezzel a mátrixszal, és a hozzá tartozó $B_1, B_2 \subset B$ index halmazokkal írjuk fel a (4.4) lineáris egyenletrendszerből levezethető lineáris egyenletrendszert

$$M_{B_1B_2}\rho = \mathbf{s}_{B_1} - M_{B_1N}\mathbf{x}_N. \quad (4.6)$$

Mivel $|B_1| = |B_2|$, ezért ez a lineáris egyenletrendszer megoldható a Cramer-szabállyal, amely rendelkezik azzal az elemzés szempontjából kedvező tulajdonsággal, hogy a determinánsok becsülhetők a Hadamard-egyenlőtlenséggel.

Az előző lineáris egyenletrendszer megoldását Cramer-szabállyal a következő módon adhatjuk meg

$$\rho_i = \frac{\det(M_{B_1B_2}^{(i)})}{\det(M_{B_1B_2})}, \quad \forall i \in B_2$$

ahol $M_{B_1B_2}^{(i)}$ az a mátrix, amelyet úgy kapunk, hogy az $M_{B_1B_2}$ mátrix i . oszlopát a jobb oldal vektorával kicseréljük. Legyen

$$\xi_i := \begin{cases} \rho_i, & \text{ha } i \in B_2 \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Nyilvánvaló, hogy a ζ vektor megoldása a (4.4) lineáris egyenletrendszernek és már csak azt kell megmutatnunk, hogy a (4.5) előjelkötések is teljesülnek.

Ha $i \notin B_2$, akkor $\mathbf{x}_i - \zeta_i = \mathbf{x}_i > 0$, ellenkező esetben ρ vektorra kell felső becslést adnunk. Mivel az $M_{B_1 B_2}$ mátrix egész számokból áll, ezért $|\det(M_{B_1 B_2})| \geq 1$. A Hadamard-egyenlőtlenséget használva

$$|\rho_i| \leq |\det(M_{B_1 B_2}^{(i)})| \leq \|\mathbf{s}_{B_1} - M_{B_1 N} \mathbf{x}_N\| \prod_{j \in B_2 \setminus \{i\}} \|M_{B_j}\| \leq \|\mathbf{s}_{B_1} - M_{B_1 N} \mathbf{x}_N\| \pi_B,$$

adódik, figyelembe véve π_B definícióját, és ekkor

$$\begin{aligned} \|\mathbf{s}_B - M_{BN} \mathbf{x}_N\| &\leq \sqrt{|B|} \|\mathbf{s}_B - M_{BN} \mathbf{x}_N\|_\infty \leq \sqrt{|B|} (\|\mathbf{s}_B\|_\infty + \|M_{BN} \mathbf{x}_N\|_\infty) \\ &\leq \sqrt{|B|} \left(\frac{\varepsilon}{\sigma_{SP}} + \frac{\varepsilon}{\sigma_{SP}} \|M_{BN}\|_\infty \right) \leq \frac{\varepsilon}{\sigma_{SP}} \sqrt{|B|} (1 + w) \leq \frac{2w\varepsilon\sqrt{|B|}}{\sigma_{SP}}. \end{aligned}$$

Ezt felhasználva a ρ komponenseire a következő becslést kapjuk,

$$\rho_i \leq \frac{2w\varepsilon\sqrt{|B|}\pi_B}{\sigma_{SP}}, \quad i \in B_2,$$

azaz $\mathbf{x}_B - \zeta > 0$ elégséges feltétele

$$\frac{\sigma_{SP}}{2n} - \frac{2w\sqrt{|B|}\pi_B}{\sigma_{SP}} \varepsilon > 0.$$

Ez a lemmában megadott ε értékre teljesül, hiszen az előző egyenlőtlenségből, az ε értékére nagyobb korlátot kapunk

$$\varepsilon < \frac{\sigma_{SP}^2}{4nw\sqrt{|B|}\pi_B},$$

mint amekkorát a lemmában előírtunk.

A második előjelkötés akkor teljesül, ha

$$\bar{\mathbf{s}}_N := \mathbf{s}_N - M_{NN} \mathbf{x}_N - M_{NB} \zeta > \mathbf{0}$$

igaz lesz. Ennél egy erősebb feltétel a

$$\frac{\sigma_{SP}}{2n} - \|M_{NN} \mathbf{x}_N\|_\infty - \|M_{NB} \zeta\|_\infty > \mathbf{0} \quad (4.7)$$

teljesülését vizsgáljuk meg, azaz az \mathbf{s}_N vektor koordinátái helyett az alsó korlátjukat írjuk be, míg a negatív együtthatós vektorok koordinátái helyett, a vektorok végtelen normáját használtuk fel. A kifejezés 2. és 3. tagjára felsőkorlátot adunk, azaz

$$\begin{aligned} \|M_{NN} \mathbf{x}_N\|_\infty &\leq \|M_{NN}\|_\infty \|\mathbf{x}_N\|_\infty \leq w \frac{\varepsilon}{\sigma_{SP}}, \\ \|M_{NB} \zeta\|_\infty &\leq \|M_{NB}\|_\infty \|\zeta\|_\infty \leq w \frac{2w\sqrt{|B|}\pi_B}{\sigma_{SP}} \varepsilon. \end{aligned}$$

Ezeket a felső korlátokat behelyettesítve a (4.7) egyenlőtlenségbe, az ε értékére, még inkább korlátozó feltételt kapunk, azaz

$$\frac{\sigma_{SP}}{2n} - \frac{w}{\sigma_{SP}} \varepsilon - \frac{2w^2 \sqrt{|B|} \pi_B}{\sigma_{SP}} \varepsilon = \frac{\sigma_{SP}}{2n} - \frac{w}{\sigma_{SP}} (1 + 2w \sqrt{|B|} \pi_B) \varepsilon > 0.$$

Ebből a kifejezésből az ε értékére nyerhető felső korlát

$$\frac{\sigma_{SP}^2}{2nw (1 + 2w \sqrt{|B|} \pi_B)} > \varepsilon.$$

Egyszerű számolással belátható, hogy ez teljesül a megadott ε érték mellett. Tehát, valóban, a kezdeti (\mathbf{x}, \mathbf{s}) ε -optimális megoldásból kiindulva a kerekítési eljárással, a feladat egy $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}})$ optimális megoldását állítottuk elő.

Figyelembe véve azt, hogy a kerekítési eljárás leginkább számításigényes része a Gauss–Jordan elimináció, a kerekítési eljárás műveletigényére adódik a lemmában elvárt eredmény. ■

Összefoglalva, a kerekítési eljárás a következő:

1. Induljunk ki egy megfelelően pontos (\mathbf{x}, \mathbf{s}) ε -optimális megoldásból. Az ε értéke miatt a (B, N) partíció ismert.
2. A partíciónak megfelelően, a kicsi koordinátákat nullázzuk le, azaz $\bar{\mathbf{x}}_N = \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{s}}_B = \mathbf{0}$.
3. Megállapítható, hogy az M_{BB} mátrix szinguláris, ezért a (4.4) lineáris egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van. Legyen az egyik megoldása ζ .
4. A (4.4) lineáris egyenletrendszert oldjuk meg Gauss–Jordan eliminációs módszerrel, azaz állítsuk elő egy tetszőleges ρ bázis megoldását. Legyen ez a megoldás, ezentúl a ζ vektor.
5. A ζ vektor és a (4.2) lineáris egyenletrendszer segítségével definiáljuk a $\bar{\mathbf{x}}_B > \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{s}}_N > \mathbf{0}$ vektorokat.

A lemma legfontosabb lépései azt célozták meg, hogy a meghatározott ε pontosság mellett igazoljuk a $\bar{\mathbf{x}}_B$ és $\bar{\mathbf{s}}_N$ vektorok pozitivitását, amellyel beláttuk, hogy bármely – megfelelő ε pontossághoz tartozó – (\mathbf{x}, \mathbf{s}) ε -optimális megoldásból, szigorúan komplementáris megoldás állítható elő erősen polinomiális lépésszámmal és aritmetikai művelettel.

Tehát a belső pontos módszerek, a kerekítési eljárással kiegészítve, egész (illetve racionális) együttthatós lineáris programozási feladatok esetén, polinomiális lépésszámban – és polinomiális aritmetikai művelet alkalmazásával – előállítanak egy optimális megoldást.¹

A most megfogalmazott összegzést, a Dikin-féle affin skálázású algoritmus esetére, egy tételben is kimondjuk, amelynek a bizonyítása az ε -optimális megoldás polinom időben történő előállíthatóságán és az előző lemmán alapul.

¹Igaz egyelőre ezt csak, az (SP) feladatra igazoltuk és a belsőpont feltételre is szükségünk volt. A következő fejezetben azonban igazolni fogjuk, hogy tetszőleges (P) és (D) lineáris programozási feladat párok beágyazhatók egy (SP) feladatba – Goldmann–Tucker-tétel. Egy további beágyazás pedig biztosítani fogja, hogy az új (SP) feladatnak a csupa 1-esből álló vektor, megnegedett megoldása legyen. Ezzel az összes, elméleti akadály elhárul a belső pontos módszerek alkalmazhatósága szempontjából.

4.2. Tétel. Legyen adott a racionális együtthatós (SP) feladat. Továbbá legyen az $\mathbf{x}^0 \in \mathcal{F}^0$, $\mathbf{s}^0 > \mathbf{0}$ megengedett induló megoldás, amelyre $\delta(\mathbf{x}^0) \leq \tau = 2$ és $(\mathbf{x}^0)^T \mathbf{s}^0 = n$ teljesül. Legyen az $\varepsilon > 0$ számolási pontossági paraméter megfelelően megválasztva. Ekkor a Dikin-féle affin skálázási algoritmussal, az (SP) feladatnak egy szigorúan komplementáris megoldása

$$\mathcal{O}(nL) \text{ iterációban, és } \mathcal{O}(n^3 \sqrt{n} L) \text{ aritmetikai művelet}$$

segítségével előállítható, ahol L a feladat leírásához szükséges tárigényre adott felsőkorlát.

A tételünk kimondása és eredménye eltér a korábban megszokottaktól, mert itt újra a feladat leírásához szükséges tárigényre adott felsőkorlátot használjuk. Jegyzetünkben nem térünk ki erre, de megmutatható, hogy az L értéke és a (B, N) partíció megismeréséhez szükséges számítási pontosság, nagyságrendje (amelyet a logaritmus tag tartalmazott a korábbi tételekben), azonos. Ez teszi lehetővé, hogy racionális együtthatós feladatok esetén eredményünket, így is megfogalmazzhassuk.

Ebben a formában, már egy érdekes összehasonlítás kínálkozik a lineáris programozási és lineáris egyenletrendszerek megoldásának iteráció szám és művelet igényére nézve, amikor azt feltételezzük, hogy a feltételek és változók száma közel azonos. Ekkor iteráció számban a Dikin-féle affin skálázási algoritmus iteráció száma, a Gauss-Jordan eliminációs módszer iteráció számától csak a feladatra jellemző L konstans szorzóban tér el. Ezzel szemben, az aritmetikai műveletigénynél ez a szorzó már $L \sqrt{n}$ lesz.

Nem tévedünk nagyot, ha ezek a nagyon egyszerűsített összehasonlítások alapján azt mondjuk, hogy racionális együtthatós feladatok esetén, egy lineáris programozási feladat megoldása, egy lineáris egyenletrendszer megoldásához képest – az algoritmus komplexitás vizsgálata szempontjából – csak egy kicsit nehezebb feladat.²

²Az persze igaz, hogy ehhez a következtetéshez, egy sokkal bonyolultabb algoritmust kellett kitalálni és elemezni, mint amilyen a Gauss-Jordan eliminációs módszer.

5. fejezet

A Goldman-Tucker modell

Az eddigiekben a ferdén szimmetrikus önduális feladatosztállyal foglalkoztunk. A fejezet célja megmutatni, hogy tetszőleges primál–duál feladatpárnak megfeleltethető egy speciális alakú ferdén szimmetrikus feladat, melyet a feladatpárhoz tartozó Goldman–Tucker modellnek neveznek. Belátjuk, hogy elegendő a Goldman–Tucker modellt vizsgálni, ugyanis az erősen komplementáris megoldásaiból következtetni tudunk a primál és duál feladat megoldásaira, illetve a nem megoldhatóságukra.

Ezt követően feloldjuk az igen erősnek tűnő belső pont feltételt ($\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$), mely az eddig ismertetett eredmények szinte mindegyikéhez szükséges. Ezt a problémát a Goldman–Tucker modell beágyazásával oldjuk meg úgy, hogy a kapott feladatnak a csupa egyesekből álló vektor belső pontja lesz.

Befejezésül pedig a jól ismert Erős dualitás tételre mutatunk egy újabb bizonyítást a fejezet eredményeinek segítségével.

5.1. Gyenge dualitás tétel

A Goldman–Tucker modell előállításához legegyszerűbb, ha a következő, un. szimmetrikus primál–duál lineáris programozási feladatpárból indulunk ki

$$\begin{aligned} (P) \quad & \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \\ (D) \quad & \max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} : A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}, \end{aligned}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Vezessük be a *primál-*

$$\mathcal{P} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \} = \{ (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \in \mathbb{R}_{\oplus}^{n+m} : A\mathbf{x} - \mathbf{z} = \mathbf{b} \},$$

illetve a *duál megengedett megoldások halmazát*

$$\mathcal{D} = \{ \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m : A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \} = \{ (\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}_{\oplus}^{m+n} : A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c} \},$$

ahol $\mathbf{z} \in \mathbb{R}_{\oplus}^m$ a *primál-*, és $\mathbf{s} \in \mathbb{R}_{\oplus}^n$ a *duál eltérés változók*.

Ekkor kimondhatjuk, ehhez a (P) és (D) feladatpárhoz tartozó gyenge dualitás tételt. Ennek az alaknak, az az érdekessége, ahogyan a komplementaritási feltételeket – a Hadamard-szorítás felhasználásával – megfogalmazhatjuk.

5.1. Tétel. (Gyenge dualitás tétel.) Tegyük fel, hogy $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ a primál (P) és duál (D) feladatok megengedett megoldásai. Ekkor

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a komplementaritási feltételek

$$\mathbf{x}(\mathbf{c} - A^T \mathbf{y}) = \mathbf{0}, \quad \text{és} \quad \mathbf{y}(A \mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{0},$$

teljesülnek.

Bizonyítás. Az \mathbf{x} és \mathbf{y} vektorok primál és duál megengedettségét használva kapjuk, hogy

$$(\mathbf{c} - A^T \mathbf{y})^T \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{y}^T (A \mathbf{x} - \mathbf{b}) \geq 0. \quad (5.1)$$

A két egyenlőtlenséget összeadva a kívánt

$$0 \leq (\mathbf{c} - A^T \mathbf{y})^T \mathbf{x} + \mathbf{y}^T (A \mathbf{x} - \mathbf{b}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{y} \quad (5.2)$$

egyenlőtlenség adódik. Ez pontosan azt jelenti, hogy a (P) primál feladat célfüggvénye, tetszőleges primál megengedett megoldás esetén nagyobb egyenlő, mint a (D) duál feladat célfüggvénye, tetszőleges duál megengedett megoldás esetén.

A komplementaritási feltételek teljesülése esetén a (5.1) feltételek egyenlőséggel teljesülnek, így az összegük is egyenlő nullával, azaz

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y},$$

adódik.

Megfordítva, a célfüggvények egyenlősége esetén, a (5.2) feltétel egyenlőséggel teljesül, figyelembe véve az \mathbf{x} , \mathbf{y} , $A \mathbf{x} - \mathbf{b}$ és $\mathbf{c} - A^T \mathbf{y}$ vektorok nem negativitását is a (5.1) egyenlőtlenségei, egyenlőséggel teljesülnek. ■

A gyenge dualitás tétel egyszerű következménye fogalmazható meg.

5.2. Következmény. (Gyenge equilibrium tétel.) Legyenek $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ olyan primál és duál megengedett megoldások, melyekre $\mathbf{c}^T \mathbf{x} = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$. Ekkor az \mathbf{x} vektor a primál feladat és az \mathbf{y} vektor a duál feladat egy optimális megoldása.

Az előző tétel tehát azt jelenti, hogy

1. a primál megengedettség,
2. a duál megengedettség, és
3. a komplementaritás

együtt, a megoldások optimalitását garantálja. Másként kifejezve, az $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ primál és duál megengedett megoldások, optimalitásának a szükséges és elégséges kritériuma a következő fordított egyenlőtlenség

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x} \leq \mathbf{b}^T \mathbf{y},$$

amely a $\zeta \geq 0$ eltérés változó bevezetésével, az alábbi alakra hozható

$$\mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \zeta = 0. \quad (5.3)$$

Ebből viszont az következik, hogy az optimalitáshoz $\zeta = 0$ teljesülése kell.

5.2. Goldman–Tucker modell

Célunk a lineáris programozási feladat olyan megoldásainak előállítás, melyekre a dualitási rés nulla, így azt az egyenlőtlenségrendszert kell megoldanunk, amely a primál és duál feltételekből áll, valamint előírjuk, hogy a duál célfüggvény értéke legalább akkora, mint a primál célfüggvény értéke ($\mathbf{b}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{x}$). Ekkor ugyanis az 5.1. Gyenge dualitás tétel miatt ezen rendszer minden megengedett megoldása primál és duál megengedett megoldást ad, amelyre a célfüggvényértékek szükségképpen egyenlők, így az 5.2. Következmény szerint optimális megoldások.

A primál- és duál megengedett megoldáshalmazok második, eltérés változók segítségével felírt egyenlőséges feltételek és a (5.3) egyenlet segítségével, felírhatjuk az alábbi egyenlőtlenségrendszert

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} - \mathbf{z} &= \mathbf{b}, & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s} &= \mathbf{c}, & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \zeta &= 0, & \zeta \geq 0 \end{aligned}$$

ahol az $(\mathbf{z}, \mathbf{s}, \zeta)$ változók az eltérés változók. Homogenizálva az egyenleteket az ún. *Goldman-Tucker feladatot* kapjuk

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Ax} - \zeta \mathbf{b} - \mathbf{z} &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \zeta \mathbf{c} - \mathbf{s} &= \mathbf{0}, & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \zeta &= 0, & \zeta \geq 0, & \zeta \geq 0. \end{aligned} \right\} (GT).$$

Könnyen igazolható a következő egyszerű feladat.

5.3. Feladat. A (P) és (D) feladatok tetszőleges \mathbf{x} , és \mathbf{y} optimális megoldás párja, melyre a dualitási rés nulla, a megfelelő Goldman-Tucker rendszer egy megoldását adja a $\zeta = 1$ és $\zeta = 0$ választással.

Vezessük be a következő jelöléseket

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{A} & -\mathbf{b} \\ -\mathbf{A}^T & 0 & \mathbf{c} \\ \mathbf{b}^T & -\mathbf{c}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \\ \zeta \end{pmatrix},$$

ekkor az alábbi

$$\min \{ \mathbf{0}^T \mathbf{u} : M\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \} \quad (SP_{PD})$$

(homogén) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatot kapjuk, amelyik tehát ekvivalens a (GT) feladattal.

Összegezve, tehát azt kaptuk, hogy bármely primál–duál lineáris programozási feladattól elő lehet állítani egy velük ekvivalens (SP) feladatot.

Vegyük észre, hogy az M ferdén szimmetrikus mátrixnak van három nullákkal kitöltött diagonális blokkja, és ezek mérete, rendre megfelel primál- és duál feltételek számának, míg az utolsó blokknak a mérete 1. (Ez tartozik a célfüggvényhez.)

5.4. Feladat. Megmutatható, hogy ennek a (P) és (D) lineáris programozási feladatokból levezetett (SP_{PD}) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatnak soha sem lehet belsőpontja.

Felhívnom a figyelmet, hogy a 1.1. Példában, szereplő (SP_{sd}) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladat nem egy primál- és duál lineáris programozási feladat párból vezettük le.

Az (SP_{PD}) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladat, megengedett megoldás halmazát a következő alakban írhatjuk fel

$$\mathcal{F} = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N : M\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geq \mathbf{0} \} = \{ (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbb{R}_{\oplus}^{2N} : M\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0} \},$$

ahol \mathbf{v} a feladat eltérés változója és $N = m + n + 1$.

5.3. Beágyazás

Ebben a részben a (GT) feladatot beágyazzuk egy, egy dimenzióval nagyobb, ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatba oly módon, hogy az előálló új (\overline{SP}) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatnak a csupa egyes vektor már szigorú belső pontja lesz.

Könnyen belátható, hogy általában a (GT) feladat esetén, az $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) \notin \mathcal{F}$, annak ellenére, hogy $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}_{+}^{2N}$ teljesül, hiszen ahhoz, hogy

$$M\mathbf{e} - \mathbf{e} = \mathbf{0}$$

teljesüljön, az M mátrixnak nagyon speciálisnak kellene, hogy legyen. Tehát az $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e})$ vektor behelyettesítésekor egy hibavektort kapunk, amelyet jelöljön az \mathbf{w} vektor és legyen

$$\mathbf{w} := \mathbf{e} - M\mathbf{e}.$$

Készítsük el az \overline{M} ferdén szimmetrikus mátrixot az alábbi módon

$$\overline{M} := \begin{pmatrix} M & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{pmatrix}.$$

Ekkor az \bar{M} mátrix segítségével definiálhatunk egy (\bar{SP}) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatot. Miután meghatároztuk az \bar{M} mátrixot, az (\bar{SP}) feladat megkonstruálásához még meg kell határoznunk a $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}_{\oplus}^{N+1}$ vektort, úgy, hogy az új feladatnak legyen szigorú belső pontja.

5.5. Tétel. Legyen adott az $\bar{M} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$ mátrix. Ha a $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{R}_{\oplus}^{N+1}$ vektorra igaz, hogy

$$\bar{q}_i = 0, \text{ ha } i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{és} \quad \bar{q}_{N+1} = N + 1,$$

ahol $N = m + n + 1$, akkor az $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}_{+}^{2(N+1)}$ vektor megengedett belső pontja az (\bar{SP}) feladatnak.

Bizonyítás. Végezzük el az $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e})$ vektorral a megadott műveleteket és ellenőrizzük le hogy az

$$\bar{M}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}} = -\bar{\mathbf{q}},$$

teljesül. Végezzük el a részletes számításokat, azaz

$$\begin{pmatrix} M & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\mathbf{e} + \mathbf{r} - \mathbf{e} \\ -\mathbf{r}^T\mathbf{e} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M\mathbf{e} + (\mathbf{e} - M\mathbf{e}) - \mathbf{e} \\ -(\mathbf{e} - M\mathbf{e})^T\mathbf{e} - 1 \end{pmatrix},$$

elvégezve a műveleteket, figyelembe véve az M mátrix ferdén szimmetrikuságát, azaz $\mathbf{e}^T M \mathbf{e} = 0$ kifejezést, kapjuk, hogy

$$\begin{pmatrix} M & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -(N+1) \end{pmatrix} = -\bar{\mathbf{q}},$$

tehát a $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}_{+}^{2(N+1)}$ vektor megengedett megoldása az (\bar{SP}) feladatnak és így nyilván belső pontja is. ■

Összefoglalva, tetszőleges, szimmetrikus primál-duál lineáris programozási feladat párból kiindulva feltudjuk írni a Goldman-Tucker modellt, majd pedig a (GT) modellt beágyazhatjuk az előzőekben megkonstruált (\bar{SP}) ferdén szimmetrikus, önduális lineáris programozási feladatba, amelyeknek ismert az

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = (\mathbf{e}, \mathbf{e}) \in \mathbb{R}_{+}^{2(N+1)}$$

belső pontja. Ez a pont a konstrukció alapján rajta van az (\bar{SP}) feladat centrális útján. Tehát erre az (\bar{SP}) feladatra, bármely belsőpont alkalmazható az $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}})$ induló belső ponttal és polinomiális időben előállítható egy ε -optimális megoldása az (\bar{SP}) feladatnak illetve megfelelően megválasztott, a feladat adataitól függő $\varepsilon > 0$ esetén az ε -optimális megoldásból a kerekítési eljárással, polinomiális időben optimális, szigorúan komplementáris megoldás állítható elő.

Írjuk fel az (\bar{SP}) feladat

$$\left. \begin{array}{l} \min \bar{\mathbf{q}}^T \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{M}\bar{\mathbf{u}} - \bar{\mathbf{v}} = -\bar{\mathbf{q}} \\ \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (\bar{SP}),$$

és vizsgáljuk meg a tulajdonságait. Ehhez először is írjuk ki részletesen, azaz

$$\left. \begin{array}{l} \min (N+1) \bar{u}_{N+1} \\ \left(\begin{array}{cc} M & \mathbf{r} \\ -\mathbf{r}^T & 0 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \bar{u}_{N+1} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \bar{v}_{N+1} \end{array} \right) = - \left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ N+1 \end{array} \right) \\ \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (\overline{SP}).$$

Mivel létezik az (\overline{SP}) feladatnak szigorúan komplementáris megoldása, és tudjuk, hogy az (SP) feladat optimum értéke nulla, ezért következik, hogy

$$\bar{u}_{N+1} = 0, \quad \text{és} \quad \bar{v}_{N+1} > 0$$

igaz, bármely optimális megoldásra. Tehát beláttuk a következő állítást.

5.6. Állítás. Legyen adott az $\bar{M} \in \mathbb{Z}^{(N+1) \times (N+1)}$ mátrix. Tegyük fel, hogy a $\bar{\mathbf{q}} \in \mathbb{Z}_{\oplus}^{N+1}$ vektorra igaz, hogy

$$\bar{q}_i = 0, \quad \text{ha } i = 1, 2, \dots, N, \quad \text{és} \quad \bar{q}_{N+1} = N+1,$$

akkor az (\overline{SP}) feladatnak létezik optimális megoldása, $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = ((\mathbf{u}, \bar{u}_{N+1}), (\mathbf{v}, \bar{v}_{N+1}))$, amelyet polinominális iterációban elő tudunk állítani és

$$\bar{u}_{N+1} = 0, \quad \text{és} \quad \bar{v}_{N+1} > 0,$$

azaz, az (\mathbf{u}, \mathbf{v}) megoldása lesz a (GT) modellnek.

5.4. Goldman-Tucker tétel és következményei

Tekintsük a szimmetrikus primál–duál lineáris programozási feladatpárt

$$\begin{array}{ll} (P) & \min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \\ (D) & \max \{ \mathbf{b}^T \mathbf{y} : A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \}, \end{array}$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, $\mathbf{b}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ és $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Továbbá, az ezekből a feladatokból levezethető Goldman-Tucker modellt

$$\left. \begin{array}{llll} A\mathbf{x} & -\zeta\mathbf{b} & -\mathbf{z} & = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \\ -A^T\mathbf{y} & +\zeta\mathbf{c} & -\mathbf{s} & = \mathbf{0}, & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, & \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{b}^T\mathbf{y} & -\mathbf{c}^T\mathbf{x} & & -\zeta & = 0, & \zeta \geq 0, \quad \zeta \geq 0. \end{array} \right\} (GT).$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a (P) és (D) feladatok tetszőleges (\mathbf{x}, \mathbf{y}) optimális megoldás párja, melyre a dualitásrés nulla, a megfelelő Goldman-Tucker rendszer egy megoldását adja $\zeta = 1$, $\zeta = 0$ választással.

5.7. Tétel. Legyen adott egy szimmetrikus primál és duál lineáris programozási feladatpár. Tekintsük a hozzá tartozó Goldman-Tucker modell egy $(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \bar{\zeta}, \mathbf{z}, \mathbf{s}, \zeta)$ megoldását. Az alábbi állítások igazak:

1. Vagy $\bar{\zeta} = 0$ vagy $\zeta = 0$, azaz $\bar{\zeta}\zeta > 0$ nem lehet igaz.
2. Ha $\bar{\zeta} > 0$ és $\zeta = 0$, a primál (P) és duál (D) feladatok egy $(\frac{\mathbf{x}}{\bar{\zeta}}, \frac{\mathbf{y}}{\zeta})$ optimális megoldás párját adja, amelyre a dualitásrés nulla.
3. Ha $\bar{\zeta} = 0$ és $\zeta > 0$, akkor vagy a (P) , vagy a (D) feladat, vagy mindkettő nemmegengedett.

Bizonyítás. Az első állítást indirekt bizonyítjuk. Ha $\bar{\zeta}\zeta$ pozitív lenne, akkor

$$0 < \bar{\zeta}\zeta = \bar{\zeta}\mathbf{b}^T\mathbf{y} - \zeta\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} - \mathbf{z}^T\mathbf{y} - \mathbf{x}^T A^T\mathbf{y} - \mathbf{s}^T\mathbf{x} = -\mathbf{z}^T\mathbf{y} - \mathbf{s}^T\mathbf{x} \leq 0$$

egyenlőtlenséget kapnánk, ami nyilvánvaló ellentmondás. Felhasználtuk a

$$\zeta = \mathbf{b}^T\mathbf{y} - \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \quad \bar{\zeta}\mathbf{b} = A\mathbf{x} - \mathbf{z}, \quad \text{és} \quad -\bar{\zeta}\mathbf{c} = -A^T\mathbf{y} - \mathbf{s}$$

egyenleteket és az $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ illetve $\mathbf{z}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ vektorok nem negativitását.

A második állítás behelyettesítéssel könnyen ellenőrizhető.

A harmadik állítás igazolásánál a $\bar{\zeta} = 0$ feltételből következik, hogy $A\bar{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$ és $A^T\bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{0}$. Továbbá, ha $\bar{\zeta} > 0$, akkor vagy $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$, vagy $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < 0$, vagy mindkettő fennáll. Ha $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$, akkor, feltételezve, hogy a (P) feladatnak van egy $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ megoldása a

$$0 < \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} \leq \mathbf{x}^T A^T\bar{\mathbf{y}} \leq 0$$

ellentmondáshoz jutunk. Tehát, ha $\mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} > 0$, akkor (P) nem megengedett.

Hasonlóan, ha $\mathbf{c}^T\bar{\mathbf{x}} < 0$, akkor a duál feladat nem megengedettséget kapjuk. ■

Az előző tételből levezethető az eredeti Goldman-Tucker tétel. Vegyük észre, hogy a (GT) feladat a következő egyenlőtlenségrendszer formában is megadható

$$M\mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geq \mathbf{0}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{v} = M\mathbf{u}.$$

5.8. Állítás. A Goldman-Tucker egyenlőtlenségrendszernek van szigorúan komplementáris megoldása $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}_{\oplus}^{2N}$, azaz olyan megoldása, melyre

$$\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}} > \mathbf{0}.$$

Bizonyítás. Az (\overline{SP}) feladatnak van belső pontja, ezért meg tudjuk találni az előző fejezetben ismerttetett primál-duál Dikin-féle affin skálázású belső pontos algoritmussal. Az optimális,

szigorúan komplementáris megoldásából előállíthatunk egy vektort, $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) \in \mathbb{R}_{\oplus}^{2N}$, amelyre igaz, hogy $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}} > \mathbf{0}$. Továbbá

$$(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) = ((\mathbf{y}, \mathbf{x}, \zeta), (\mathbf{z}, \mathbf{s}, \zeta)).$$

A szigorú komplementaritás miatt ζ és ζ közül pontosan az egyik 0, a másik határozottan nagyobb, mint 0. ■

Az előző állításból, az azt megelőző tétel segítségével igazolható a kimondásra kerülő következmény.

5.9. Következmény. (Erős dualitás tétel.) *Legyen adott egy (szimmetrikus) primál–duál lineáris programozási feladatpár. Az alábbi két állítás közül pontosan az egyik igaz:*

1. *Vagy a (P), vagy a (D) feladat, vagy mindkettő nem megengedett.*
2. *Létezik $\mathbf{x}^* \in \mathcal{P}$ és $\mathbf{y}^* \in \mathcal{D}$ megoldások, amelyekre $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.*

6. fejezet

Teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmikusan büntetőfüggvényes belsőpontos módszer

Ebben a fejezetben egy belsőpontos algoritmust dolgozunk ki a standard lineáris programozási feladatpárra, teljesen az alapoktól. Ez a fejezet egy klasszikus lineáris programozási előadás végén is elmondható matematikus, alkalmazott matematikus vagy informatikus hallgatóknak, hiszen letisztult, egyszerű bizonyításokon alapuló eredményekre épül az algoritmus elemzése. Az előző fejezetek fontos eredményeit (pl. centrális út létezése és egyértelműsége), egy ilyen előadás sorozat alkalmával, bizonyítás nélkül, célszerű hivatkozni.

A lineáris programozási feladatpár bevezetése után, megadjuk az optimalitási kritériumot, majd ennek relaxációja után jutunk el a centrális út fogalmához és a megoldandó nemlineáris egyenlőtlenségrendszerhez. Természetes módon merül fel annak a kérdése, hogy egy adott belsőpontból elő tudunk-e állítani a centrális út egy elemét, egy ún. μ -centrumot, valamely adott $\mu > 0$ centralitási paraméter esetén. Az általunk ismertett számítási eljárás a Newton-rendszer bevezetésén alapul. Megmutatható, hogy a Newton-rendszerből származtatott Newton-irányok megfelelő párja ortogonális egymásra illetve bizonyos feltételek megléte esetén a teljes Newton-irányba tett lépéssel kedvező dualitás résű megoldás állítható elő. Ezzel igen gyorsan a kezünkben lesz egy olyan eljárás, amelyik segítségével, iteratív számítási eljárás lehetősége körvonalazódik. A naív számítási eljárás, konvergens és hatékony algoritmussá való kiteljesítése még egy kicsit több matematikai erőfeszítést igényel.

Az erőfeszítések egyik első lépése a Newton-rendszer átskálázása, majd pedig egy érdekes, nem triviális centralitás mérték bevezetése. Az átskálázás és a centralitás mértéke előkészíti azt, hogy megfelelően mérni tudjuk az új megoldásnak nem csak a szigorú megengedettségét, hanem a távolságát is a célul kitűzött μ -centrumtól.

A számítás menetében lényeges, hogy egy adott primál-duál belsőponthoz kitűzött μ -centrumot, egy Newton-lépéssel mennyire tudjuk megközelíteni és az új primál-duál belsőponthoz, hogyan kell meghatározni a következő μ -centrum paraméterét. Ha ezt megváltjuk akkor visszajutunk az eredeti kérdéshez, de egy kisebb értékű μ paraméterrel, vagyis egy iteráció után jobb dualitás résünk lesz, mint a kiinduláskor volt, és megismételhetjük a számítási eljárást. Látható, hogy ezt a számítási eljárást, iteratív algoritmussá szervezhetjük. Lényeges kérdés lesz a centrális út környezetének a korlátozása egy $1 > \tau \geq 0$ paraméter

segítségével, és az is, hogyan számoljuk ki, – egy $1 > \theta > 0$ paraméter segítségével, lehetőleg automatikusan, – a centrális útnak egy új, kisebb μ paraméterű centrumát, amelyet az aktuális belsőpontból egyetlen Newton-lépés segítségével megközelíthetünk.

A teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmiikus büntetőfüggvényes belsőpontos módszer általános megfogalmazása után, egy ún. *kis lépéses* változat polinomiális lépésszámát igazoljuk $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ választás mellett.

6.1. Lineáris programozási feladatpár, centrális út

A lineáris programozási *primál* és *duál* feladatok legyenek a következő alakban adottak

$$\left. \begin{array}{l} \min \quad \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{array} \right\} (P) \qquad \left. \begin{array}{l} \max \quad \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c} \end{array} \right\} (D)$$

ahol $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ és $\mathbf{y}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Az általánosság korlátozása nélkül feltehető, hogy $\text{rang}(A) = m$. Legyen a *primál* illetve a *duál megengedett megoldások* halmaza rendre

$$\mathcal{P} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{b}\},$$

és

$$\mathcal{D} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \mid A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{c}\} = \{(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathbb{R}^{m+n} \mid A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} = \mathbf{c}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}.$$

Jelölje a

$$\mathcal{P}_+ = \{\mathbf{x} \in \mathcal{P} \mid \mathbf{x} > \mathbf{0}\} \quad \text{és a} \quad \mathcal{D}_+ = \{(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{D} \mid \mathbf{s} > \mathbf{0}\}$$

primál- illetve *duál belsőpontok halmazát*.

Belsőpontos algoritmusok elindításához szükséges olyan induló megoldás megadása, amelyek a \mathcal{P}_+ és \mathcal{D}_+ halmazok eleme. Ha ilyen pontot nem tudunk megadni, akkor nem tudjuk a belsőpontos módszert elindítani. Az előző fejezetben tárgyaltuk a *beágyazás eljárást* belsőpont előállítására szimmetrikus primál-duál lineáris programozási feladatpárra. Majd a beágyazott ferdén szimmetrikus lineáris programozási feladatra megadott belsőpontos megoldásról a belsőpontos algoritmusok elindíthatók. Tehát a beágyazott feladatnak mindig van induló megoldása és így a korábbi eredmények alapján optimális megoldása is. A beágyazott feladat optimális (ε -optimális) megoldásából, a Goldman-Tucker tétel segítségével megtudhatjuk, hogy az eredeti primál-duál feladatnak van-e optimális megoldása, és ha van, akkor azt egyszerűen ki is számolhatjuk.

A beágyazás módszertanát a fejezet elején megfogalmazott primál-duál lineáris programozási feladatpárra is kidolgozhatnánk. Ehelyett, most egy egyszerűbb utat választunk, mégpedig azt, hogy feltesszük olyan primál-duál lineáris programozási feladatpárral foglalkozunk, amelyek esetén *létezik belsőpont*, és mi egy ilyen *ismerünk* is, azaz adott egy primál- és egy duál belsőpont.

Ezt a szokásos módon a belsőpont feltétellel fogalmazzuk meg.

Belsőpont feltétel: létezik $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}^+$ (létezik $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}^+$)

A belsőpontos feltételek teljesülése esetén, azaz, ha $\mathcal{P}_+ \neq \emptyset$, és a $\mathcal{D}_+ \neq \emptyset$, akkor az erős dualitás tétel alapján létezik primál (és duál) optimális megoldás.

Tehát a belsőpont feltétel egy nagyon erős feltétel. Ha nem ismernénk már a beágyazás eljárást és a Goldman-Tucker tételt, akkor azt gondolhatnánk, hogy belsőpontos algoritmussal

csak optimális megoldással rendelkező lineáris programozási feladatokat tudunk megoldani és a módszer arra nem alkalmas, hogy tetszőleges feladatról eldöntse, hogy létezik-e optimális megoldás vagy sem.

A *primál* illetve a *duál optimális megoldások halmaza* a

$$\mathcal{P}^* := \{\mathbf{x}^* \in \mathcal{P} : \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* \leq \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{P}\},$$

és a

$$\mathcal{D}^* := \{\mathbf{y}^* \in \mathcal{D} : \mathbf{b}^T \mathbf{y}^* \geq \mathbf{b}^T \mathbf{y}, \forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}\}.$$

Tetszőleges primál-duál megengedett megoldaspár, $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ és $(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{D}$ esetén, definiálni tudjuk a megoldásokhoz tartozó célfüggvény értékek közötti különbséget, ezt nevezzük a megoldásokhoz tartozó *dualitás* résznek.

Dualitás rész: $\mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \mathbf{y} = (\mathbf{A}^T \mathbf{y} + \mathbf{s})^T \mathbf{x} - \mathbf{y}^T (\mathbf{A} \mathbf{x}) = \mathbf{s}^T \mathbf{x}.$

Szükségünk lesz a következő egyszerű állítással megfogalmazott eredményre.

6.1. Állítás. Legyenek az $\mathbf{x}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ olyan vektorok, amelyekre $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ és $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ teljesül. Az \mathbf{x} és \mathbf{s} vektorok pontosan akkor ortogonálisak egymásra, ha $x_i s_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$ esetén.

Felhasználva az előző állítást az *optimalitási kritériumok* az alábbi formában írhatók

$$\begin{array}{rcl} A \mathbf{x} & = & \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \\ A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} & = & \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} \geq \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \mathbf{s} & = & \mathbf{0}. \end{array}$$

Tetszőleges belsőpontos megoldás esetén nyilvánvalóan igaz a következő állítás.

6.2. Állítás. Ha az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$ és $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ akkor $\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}_+^n$.

Definiálhatjuk az optimalitási kritériumok speciális relaxációját, amelyet az adott primál-duál lineáris programozási feladat *centrális újának* nevezzük.

$$\left. \begin{array}{rcl} A \mathbf{x} & = & \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} > \mathbf{0}, \\ A^T \mathbf{y} + \mathbf{s} & = & \mathbf{c}, \quad \mathbf{s} > \mathbf{0}, \\ \mathbf{x} \mathbf{s} & = & \mu \mathbf{e}. \end{array} \right\} \quad (\text{CentUt}_1)$$

teljesül, ahol $\mu > 0$ adott és $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$.

A belsőpont feltevés mellett, az első fejezetben, a ferdén szimmetrikus önduális lineáris programozási feladatra igazolt, a centrális út létezését és egyértelműségét kimondó eredményhez hasonló igazolható erre a feladatpárra is.

Az $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}) > \mathbf{0}$ primál-duál megoldásból szeretnénk az előző *relaxált optimalitási kritériumok*nak egy megoldását előállítani oly módon, hogy valamilyen ismeretlen $\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{y}, \Delta \mathbf{s}$

értékkel módosítjuk a megengedett megoldást. Ugyanezt a következő formában is kifejezhetjük: szeretnénk olyan szigorúan belsőpontos megoldást kiszámolni, amelyik a centrális út feltételeket kielégíti.¹

$$\begin{aligned} A(\bar{x} + \Delta x) &= \mathbf{b}, & \bar{x} + \Delta x &> \mathbf{0}, \\ A^T(\bar{y} + \Delta y) + (\bar{s} + \Delta s) &= \mathbf{c}, & \bar{s} + \Delta s &> \mathbf{0}, \\ (\bar{x} + \Delta x)(\bar{s} + \Delta s) &= \mu \mathbf{e}. \end{aligned}$$

Egyszerű számítások után kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} A \Delta x &= \mathbf{0}, & \bar{x} + \Delta x &> \mathbf{0}, \\ A^T \Delta y + \Delta s &= \mathbf{0}, & \bar{s} + \Delta s &> \mathbf{0}, \\ \bar{s} \Delta x + \bar{x} \Delta s + \Delta x \Delta s &= \mu \mathbf{e} - \bar{x} \bar{s}, \end{aligned}$$

ahol az utolsó egyenlet nemlineáris (kvadrátikus). Ezt a nemlineáris egyenlőtlenségrendszert egyszerűsítjük. Két dolgot hagyunk el: **1.** a pozitivitási megkötéseket és **2.** a másodrendű tagokat. Ekkor a harmadik egyenlet a következő alakúvá válik

$$\bar{s} \Delta x + \bar{x} \Delta s = \mu \mathbf{e} - \bar{x} \bar{s}.$$

Az egyszerűsítés végén az ún. *Newton-rendszer*hez jutunk, amely egy lineáris egyenlet-rendszer.²

Keresendő a $(\Delta x, \Delta y, \Delta s) \in \mathbb{R}^{n+m+n}$ vektor úgy, hogy

$$\left. \begin{aligned} A \Delta x &= \mathbf{0}, \\ A^T \Delta y + \Delta s &= \mathbf{0}, \\ \bar{s} \Delta x + \bar{x} \Delta s &= \mu \mathbf{e} - \bar{x} \bar{s}. \end{aligned} \right\} \quad (NR)$$

Legyenek $\bar{S} = \text{diag}(\bar{s})$ és $\bar{X} = \text{diag}(\bar{x})$ pozitív mátrixok. Ekkor az utolsó egyenletet a következő formára hozzuk

$$\bar{S} \Delta x + \bar{X} \Delta s = \mu \mathbf{e} - \bar{S} \bar{x}, \quad \text{azaz} \quad \Delta x + \bar{S}^{-1} \bar{X} \Delta s = \mu \bar{S}^{-1} - \bar{x}.$$

Alkalmazzuk az A mátrixot a kapott n -dimenziós vektorokra és használjuk fel az $\bar{x} \in \mathcal{P}$ összefüggést illetve a Newton-rendszer első egyenletét. Ekkor

$$A \bar{X} \bar{S}^{-1} \Delta s = A \Delta x + A \bar{X} \bar{S}^{-1} \Delta s = \mu A \bar{S}^{-1} - A \bar{x} = \mu A \bar{S}^{-1} - \mathbf{b},$$

¹Az ilyen szigorúan belsőpontos megoldást μ -centrumnak nevezzük. A belsőpont feltétel mellett a centrális út létezését és egyértelműségét igazoltuk az első fejezetben ferdén szimmetrikus önduális lineáris programozási feladatra. Az 5. fejezetben a szimmetrikus primál-duál lineáris programozási feladatpárról megmutattuk, hogy speciális ferdén szimmetrikus önduális lineáris programozási feladattá alakítható át. Igazolható, hogy a 6. fejezetben megfogalmazott (P) és (D) feladatokhoz tartozó centrális út feladatnak $(CentUt_1)$ létezik bármely $\mu > 0$ esetén egyértelmű megoldása, azaz a centrális út létezik és egyértelmű.

²A ferdén szimmetrikus önduális feladat esetén is megadtuk a Newton-rendszert és levezettük számos tulajdonságot. Hasonló eredmények egy részét a most megfogalmazott Newton-rendszer esetén is levezetjük.

figyelembe véve, hogy $A \Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$, és $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$ azaz $A \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. A Newton-rendszer második egyenletére alkalmazzuk az $A \bar{X} \bar{S}^{-1}$ mátrixot, majd pedig rendezzük át az egyenletet. Ekkor

$$-A \bar{X} \bar{S}^{-1} A^T \Delta \mathbf{y} = A \bar{X} \bar{S}^{-1} \Delta \mathbf{s} = \mu A \bar{\mathbf{s}}^{-1} - \mathbf{b},$$

lineáris egyenletrendszerhez jutunk. Mivel $\text{rang}(A) = m$, ezért $A \bar{X} \bar{S}^{-1} A^T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ és nem szinguláris mátrix, hiszen az A teljes rangú, ezért $\Delta \mathbf{y}$ egyértelműen kiszámítható, azaz

$$\Delta \mathbf{y} = (A \bar{X} \bar{S}^{-1} A^T)^{-1} (\mathbf{b} - \mu A \bar{\mathbf{s}}^{-1}).$$

Ezekután egyszerűen és egyértelműen kiszámíthatók a $\Delta \mathbf{s}$ és a $\Delta \mathbf{x}$ vektorok, azaz

$$\Delta \mathbf{s} = -A^T (A \bar{X} \bar{S}^{-1} A^T)^{-1} (\mathbf{b} - \mu A \bar{\mathbf{s}}^{-1}),$$

és

$$\Delta \mathbf{x} = \mu \bar{\mathbf{s}}^{-1} - \bar{\mathbf{x}} + \bar{X} \bar{S}^{-1} A^T (A \bar{X} \bar{S}^{-1} A^T)^{-1} (\mathbf{b} - \mu A \bar{\mathbf{s}}^{-1}).$$

Könnyen megmutathatjuk, hogy a $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ vektorok ortogonális kiegészítő alterekben fekszenek.

6.3. Lemma. A Newton-rendszer megoldásával előálló $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ vektorok, ortogonális vektorok, azaz $(\Delta \mathbf{x})^T \Delta \mathbf{s} = 0$.

Bizonyítás. A $\Delta \mathbf{x} \in \text{Null}(A)$ és $\Delta \mathbf{s} \in \text{rowsp}(A^T) = \text{columnsp}(A) = R(A)$ és a $\text{Null}(A) \perp R(A)$. ■

Mivel a Newton-rendszerhez egyszerűsítéseken keresztül jutottunk el, természetes módon merül fel a kérdés, hogyan alakul majd az új megoldás megengedettsége, ha meglépjük a teljes Newton-lépést. A teljes Newton-lépéssel előálló, új megoldás megengedettségéről szól a következő lemma.

6.4. Lemma. A (P) és (D) feladatok esetén, $\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\mu \mathbf{e} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$, ahol $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$ és $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$.

Bizonyítás. Először igazoljuk, hogy ha $\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, és $\bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$, akkor

$$\mu \mathbf{e} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$$

teljesül. Ezt a következő egyszerű számolással mutathatjuk meg

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \leq (\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x})(\bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}) &= \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \\ &= \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} = \mu \mathbf{e} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s}. \end{aligned}$$

Másfelől megmutatjuk, hogy, ha $\mu \mathbf{e} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$, akkor a teljes Newton-lépést meg-
lépve megengedett megoldáshoz jutunk.

Kiindulunk a $\mu \mathbf{e} + \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$, összefüggésből, azonnal adódik, hogy

$$\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \geq -\mu \mathbf{e}.$$

Jelölje $\mathbf{x}^\alpha = \bar{\mathbf{x}} + \alpha \Delta \mathbf{x}$, és $\mathbf{s}^\alpha = \bar{\mathbf{s}} + \alpha \Delta \mathbf{s}$, az $\alpha \in [0, 1]$ intervallumba tartozó lépéshosszal adott új megoldást. Az \mathbf{x}^α és \mathbf{s}^α megoldások megengedettségét, előjel kötöttségét kell megvizsgálnunk.

Ha $\alpha = 0$ akkor az $\mathbf{x}^0 = \bar{\mathbf{x}}$ és az $\mathbf{s}^0 = \bar{\mathbf{s}}$, tehát $\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} > \mathbf{0}$.

Másfelől, ha $\alpha = 1$ akkor az $\mathbf{x}^1 = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}$ és az $\mathbf{s}^1 = \bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}$. Számítsuk ki az $\mathbf{x}^\alpha \mathbf{s}^\alpha$ vektort,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\alpha \mathbf{s}^\alpha &= \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha (\bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x}) + \alpha^2 \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} = \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha (\mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}) + \alpha^2 \Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} \\ &\geq \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha (\mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}) - \alpha^2 \mu \mathbf{e} = (1 - \alpha) \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha (1 - \alpha) \mu \mathbf{e} \\ &= (1 - \alpha) (\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} + \alpha \mu \mathbf{e}) \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Tehát $\mathbf{x}^1 \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{s}^1 \geq \mathbf{0}$. ■

Adott $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$ és $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ primál és duál szigorúan megengedett megoldásból kiindulva a centrális út adott $\mu > 0$ paraméterhez tartozó μ -centrumát szeretnénk volna kiszámolni. Ehelyett a Newton-rendszer egyértelmű megoldásának a segítségével az $\mathbf{x}^1 = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}$ és az $\mathbf{s}^1 = \bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}$ közelítő, megengedett megoldásokat tudtuk előállítani, az ún. *Newton-irányok*, $\Delta \mathbf{x}$ és a $\Delta \mathbf{s}$ segítségével. Mivel az \mathbf{x}^1 és az \mathbf{s}^1 vektorok előállításában a Newton-irányok együtthatója 1, ezért azt mondjuk, hogy a *teljes Newton-lépést*, a Newton-irányokban megléptük. Az \mathbf{x}^1 és az \mathbf{s}^1 megengedett megoldások közelítik az egyértelmű $(\mathbf{x}(\mu), \mathbf{s}(\mu))$ μ -centrumot, amelyet nem tudunk pontosan kiszámolni. A μ -centrum egy alapvető tulajdonságát

$$\mathbf{x}(\mu)^T \mathbf{s}(\mu) = \mathbf{e}^T (\mathbf{x}(\mu) \mathbf{s}(\mu)) = \mathbf{e}^T (\mu \mathbf{e}) = \mu \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \mu n,$$

fejezi ki az, hogy a μ -centrumhoz tartozó dualitás rés μn , azaz a μ paraméter és a feladat dimenziójának a szorzata. Fontos tényt számolunk ki a következő lemmában, azt, hogy \mathbf{x}^1 és az \mathbf{s}^1 megengedett megoldások dualitás rése is pontosan μn , mint annak a μ -centrumnak a dualitás rése, amelyet közelít.

6.5. Lemma. *A (P) és (D) feladatok esetén, ha a $(\Delta \mathbf{x}, \Delta \mathbf{s})$ olyan, hogy*

$$\mathbf{x}^1 \in P_+, (\mathbf{y}^1, \mathbf{s}^1) \in D_+, \text{ akkor } (\mathbf{x}^1)^T \mathbf{s}^1 = \mu n.$$

Bizonyítás. Figyelembe véve, hogy $(\Delta \mathbf{x})^T \Delta \mathbf{s} = 0$.

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}^1)^T \mathbf{s}^1 &= (\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x})^T (\bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}) = \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} + \bar{\mathbf{s}}^T \Delta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}^T \Delta \mathbf{s} + (\Delta \mathbf{x})^T \Delta \mathbf{s} \\ &= \bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} + \mathbf{e}^T (\mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}) = \mu \mathbf{e}^T \mathbf{e} = \mu n. \end{aligned}$$

Igazoltuk, hogy $(\mathbf{x}^1)^T \mathbf{s}^1 = \mu n$, azaz a μ -centrumot közelítő megoldás dualitás rése megegyezik a μ -centrum dualitás réseivel. ■

Összefoglalva, a μ -centrum meghatározása egy adott belsőpontból, olyan egyértelmű megengedett közelítő megoldás kiszámítását teszi lehetővé a Newton-rendszer megoldásával, amelyik dualitás rése pontosan akkora, mint a μ -centrumé. Ez lehetővé teszi egy μ -centrum naív belsőpontos algoritmus megfogalmazását: adott szigorúan belsőpontos megoldáshoz

határozzunk meg egy olyan μ -centrumot, amelyik dualitás rése kisebb az adott megoldás dualitás részénél. Írjuk fel a megfelelő Newton-rendszert és számoljuk ki az abból meghatározható egyértelmű Newton-irányokat. Ha a teljes Newton lépés megtételével szigorúan megengedett megoldást tudunk előállítani, akkor azt meglépve, a közelítő megoldás új dualitás rése megegyezik majd a μ -centrum dualitás részével, azaz a dualitás rés csökkenni fog.

A kulcsfontosságú pontok az algoritmusban a következők:

- Hogyan határozhatunk meg egy adott, szigorúan belsőpontos megoldáshoz, egy μ -centrumot úgy, hogy a teljes Newton lépés megtehető legyen ?
- Hogyan határozhatunk meg olyan μ -centrum sorozatot, amelyik esetén μ nullához tart és az algoritmus hatékony, azaz polinomiális lépésszámú lesz ?

A fejezet hátralévő részében erre a két kérdésre szeretnénk választ adni.

6.2. Átskálázás

A Newton-rendszerből számolható Newton-irányok az ortogonalitásukon túl még néhány érdekes tulajdonsággal rendelkeznek, amelyek igazolása és későbbi felhasználása jobban láthatóvá válik, ha ügyesen átírjuk, átskálázzuk a Newton-rendszert. Ezt az átskálázást a lineáris programozás belsőpontos algoritmusainak az elemzésében egészen későn, a belsőpontos algoritmusok intenzív tanulmányozásának a 6. vagy 7. évében vezették be, jelentősen egyszerűsítve a lemmák és tételek bizonyításait illetve jobb és jobb komplexitás eredményeket lehetett igazolni annak következtében, hogy átláthatóbbakká váltak a gondolatmenetek.

A Newton-rendszer átskálázása, – első látásra, – nem tűnik sem egyszerűnek, sem természetesnek, de még csak hasznosnak sem. A későbbiek során, az állítások bizonyításakor válik nyilvánvalóvá az átskálázott Newton-rendszerrel való számolás előnyei. Sőt, ami ennél is lényegesebb, az átskálázott Newton-rendszer teszi lehetővé érdekes ún. centralitás mérték bevezetését, a korábban használt naív centralitás mérték helyett. A megfelelően választott centralitás mérték és a centrális út környezetét definiáló paraméter kihat az algoritmus lépéshosszára és ezen keresztül az igazolható legrosszabb lépésszám nagyságrendjére is, vagyis az algoritmus komplexitására, ahogyan azt később látni fogjuk.

Tekintsük az (NR) következő *átskálázását*. Legyen $\bar{x} \in \mathcal{P}_+$ és $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{D}_+$, szigorú primál és duál megoldások, belsőpontok. Definiáljuk a következő vektorokat

$$\mathbf{d} := \sqrt{\frac{\bar{x}}{\bar{s}}}, \quad \mathbf{u} := \sqrt{\frac{\bar{x}\bar{s}}{\mu}}, \quad \text{ekkor} \quad \frac{\mathbf{d}^{-1}\bar{x}}{\sqrt{\mu}} = \frac{\mathbf{d}\bar{s}}{\sqrt{\mu}} = \mathbf{u}.$$

Hasonlóan definiálhatjuk az átskálázott Newton-irányokat \mathbf{d}_x és \mathbf{d}_s is

$$\mathbf{d}_x := \frac{\mathbf{d}^{-1}\Delta\mathbf{x}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{és} \quad \mathbf{d}_s := \frac{\mathbf{d}\Delta\mathbf{s}}{\sqrt{\mu}}.$$

Ekkor kiszámítható az új megoldás reprezentációja az átskálázott irányok segítségével is

$$\mathbf{x}^+ = \bar{x} + \Delta\mathbf{x} = \sqrt{\mu}\mathbf{d}(\mathbf{u} + \mathbf{d}_x) \quad \text{és} \quad \mathbf{s}^+ = \bar{s} + \Delta\mathbf{s} = \sqrt{\mu}\mathbf{d}^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{d}_s).$$

Továbbá kiszámolható az új megoldások koordinátánkénti szorzatának átskálázott változata is

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ = \mu \mathbf{e} + \Delta\mathbf{x} \Delta\mathbf{s} = \mu \mathbf{e} + \sqrt{\mu}\mathbf{d}\mathbf{d}_x \sqrt{\mu}\mathbf{d}^{-1}\mathbf{d}_s = \mu(\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s). \quad (6.1)$$

A teljes Newton-lépés megléphetőségének a szükséges és elégséges feltételét az átskálázott formában is megfogalmazhatjuk.

6.6. Következmény. A (P) és (D) feladatok esetén, $\bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ és $\bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s \geq \mathbf{0}$, ahol $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$ és $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$.

Az átskálázás első figyelemre méltó következményét akkor kapjuk, amikor a (NR) utolsó egyenletét

$$\bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} = \mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}$$

próbáljuk meg felírni az átskálázott formában. Felhasználva az átskálázott Newton-irányok \mathbf{d}_x és \mathbf{d}_s , valamint az \mathbf{u} vektor definícióját, kapjuk a következő kifejezést

$$\bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} \sqrt{\mu} \mathbf{d}^{-1} \mathbf{d}_s + \bar{\mathbf{s}} \sqrt{\mu} \mathbf{d} \mathbf{d}_x = \sqrt{\mu} (\bar{\mathbf{s}} \mathbf{d} \mathbf{d}_x + \bar{\mathbf{x}} \mathbf{d}^{-1} \mathbf{d}_s) = \mu \mathbf{u} (\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s).$$

Másfelől felírhatjuk, hogy

$$\mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{s} + \bar{\mathbf{s}} \Delta \mathbf{x} = \mu \mathbf{u} (\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s),$$

és figyelembe véve az \mathbf{u} vektor definícióját az alábbi összefüggés adódik

$$\mu \mathbf{e} - \bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}} = \mu \mathbf{e} - \mu \mathbf{u}^2 = \mu \mathbf{u} (\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}).$$

Összegezve, az (NR) harmadik egyenlete, az átskálázás után, a következő alakot veszi fel

$$\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s = \mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}.$$

Bevezetve a $\mathbf{d}_y := \frac{\Delta \mathbf{y}}{\sqrt{\mu}}$ vektort, az átskálázott Newton-rendszer (NR_s) a következő lesz

$$\left. \begin{array}{l} AD \mathbf{d}_x \\ (AD)^T \mathbf{d}_y + \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \mathbf{0}, \\ \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u} \end{array} \right\} (NR_s),$$

ahol $D = \text{diag}(\mathbf{d})$, vagyis D egy diagonális mátrix, amelyeknek a diagonális elemei megegyeznek a \mathbf{d} vektor megfelelő elemeivel.

Mivel $\Delta \mathbf{x} \Delta \mathbf{s} = \mu \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s$, ezért könnyen igazolható, hogy

6.7. Következmény. Az átskálázott Newton-rendszer megoldásával előálló $\mathbf{d}_x, \mathbf{d}_s \in \mathbb{R}^n$ vektorok, ortogonális vektorok, azaz $(\mathbf{d}_x)^T \mathbf{d}_s = 0$.

A bizonyítás lehetséges az (NR_s) rendszer vizsgálatával, ahonnan kiderül, hogy a $\mathbf{d}_x \in \text{Null}(AD)$ és a $\mathbf{d}_s \in \text{rowsp}(AD) = \text{Null}(HD^{-1})$, összefüggések teljesülnek. Figyelembe véve, hogy ortogonális kiegészítő terekről van szó a $\mathbf{d}_x = P_{AD}(\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u})$ és a $\mathbf{d}_s = P_{HD^{-1}}(\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u})$, ahol P_{AD} és $P_{HD^{-1}}$ a megfelelő vetítések mátrixait jelölik.

Mivel a $(\Delta \mathbf{x})^T \Delta \mathbf{s} = \mathbf{d}_x^T \mathbf{d}_s = 0$, ezért

$$\|\mathbf{d}_x\|^2 + \|\mathbf{d}_s\|^2 = \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}\|^2,$$

teljesül.

A $\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s = \mathbf{0}$ pontosan akkor teljesül, ha $\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$, ami azzal ekvivalens, hogy $\mathbf{u}^{-1} = \mathbf{u}$, azaz $\mathbf{u} = \mathbf{e}$, figyelembe véve azt is, hogy $\mathbf{u} > \mathbf{0}$ is teljesül. Vezessük be a *centralitás mértéket* az alábbi módon

$$\delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}\| = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{\bar{\mathbf{x}} \bar{\mathbf{s}}}} \right\|,$$

ahol $\mu > 0$ adott centralitási paraméter, $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$ primál-, és $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ duál belsőpont. Tehát a centralitás mértéke az adott primál-duál belsőpont távolságát méri a célul kitűzött μ -centrumtól.

6.3. A μ -centrumot közelítő megoldás távolsága a μ -centrumtól

Adott $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ primál és duál belsőpontok. Ezekhez kitűzünk egy $\mu > 0$ paraméterrel adott μ -centrumot, amelyet szeretnénk előállítani primál és duál belsőpontok előállításával. A számításhoz a Newton-rendszer megoldásán keresztül vezet az út. Ebben a részben azzal foglalkozunk, hogy ha a belső pontok távolsága a μ -centrumhoz viszonyítva adott, akkor a μ -centrumot közelítő megoldás távolsága mekkora lesz.

Tárgyalásunk során szükségünk lesz a következő egyenlőtlenségre, amelynek a bizonyítását az olvasóra bizzuk.

6.8. Feladat. Bizonyítsa be, hogy bármely $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ esetén $\mathbf{e}^T \mathbf{z}^4 \leq \|\mathbf{z}\|^4$.

Az első lemmában, az átskálazott Newton-rendszer megoldásaként kiszámolt Newton-irányok koordinátakénti szorzatával előálló vektor normájára ad becslést.

6.9. Lemma. Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ és $\mu > 0$. Ha $\delta := \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu)$ akkor

$$\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty \leq \delta^2 \quad \text{és} \quad \|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\| \leq \delta^2 \sqrt{2}.$$

Bizonyítás. Mivel $\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s = \frac{1}{4} ((\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s)^2 - (\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^2)$, ezért

$$-\frac{1}{4} (\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^2 \leq \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s \leq \frac{1}{4} (\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s)^2.$$

Könnyen belátható, hogy

$$-\frac{1}{4} \|(\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^2\| \mathbf{e} \leq -\frac{1}{4} (\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^2, \quad (6.2)$$

és így

$$-\frac{1}{4} \|(\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^2\| \mathbf{e} \leq \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s \leq \frac{1}{4} \|(\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s)^2\| \mathbf{e}$$

teljesül. Még két apró észrevételt kell használnunk. Az első,

$$\text{bármely } \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n \text{ esetén} \quad \|\mathbf{z}^2\| \leq \|\mathbf{z}\|^2, \quad (6.3)$$

teljesül, ezért

$$-\frac{1}{4} \|\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s\|^2 \mathbf{e} \leq \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^2 \mathbf{e}$$

adódik. A második apró megfigyelés pedig a következő

$$\|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\| = \|\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s\|, \text{ mert } \mathbf{d}_x^T \mathbf{d}_s = 0,$$

és így az alábbi becslés teljesül

$$\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^2.$$

Figyelembe véve

$$\delta^2 = \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu)^2 = \frac{1}{4} \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{4} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^2,$$

összefüggést is, ezzel a lemma első egyenlőtlenségét igazoltuk.

A lemma második egyenlőtlenségének a bizonyítása a következő számoláson alapul, ahol a bizonyítás során megfogalmazott korábbi észrevételek mellett, felhasználtuk a 6.8. Feladat eredményét is,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|^2 &= \mathbf{e}^T (\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s)^2 = \frac{1}{16} \mathbf{e}^T ((\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s)^2 - (\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^2)^2 \\ &\leq \frac{1}{16} \mathbf{e}^T ((\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s)^4 + (\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s)^4) \\ &\leq \frac{1}{16} (\|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^4 + \|\mathbf{d}_x - \mathbf{d}_s\|^4) = \frac{1}{8} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^4. \end{aligned}$$

Ebből pedig kapjuk, hogy $\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}\|^2 = \delta^2 \sqrt{2}$. ■

Az előző lemma bizonyításának a teljessé tétele érdekében kérjük az olvasót, hogy a (6.2) és (6.3) egyenlőtlenségeket igazolja.

Készen állunk arra, hogy adott belsőpont és adott μ -centrum esetén megfogalmazzuk azt a feltételt, amelyik biztosítani fogja, hogy a teljes Newton-lépés megtehető legyen. Sőt, annak a biztosítására is lesz feltételünk, hogy a teljes Newton-lépés után is belsőpont megoldást kapjunk, amelyeknek a μ -centrumtól való távolságát becsülni tudjuk.

6.10. Tétel. Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ és $\mu > 0$. Ha $\delta := \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu) \leq 1$ akkor $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{P}$, $(\mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+) \in \mathcal{D}$. Továbbá, ha $\delta < 1$ akkor $\mathbf{x}^+ > \mathbf{0}$, $\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$ és

$$\delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1-\delta^2)}}.$$

Bizonyítás. A 6.6. Következmény szerint, a teljes Newton-lépés megtételével előálló $\mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}$ és $\mathbf{s}^+ = \bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}$ vektorok pontosan akkor megengedett megoldásai a (P) és (D) lineáris programozási feladatpárnak, ha $\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s \geq \mathbf{0}$ ami azzal ekvivalens, hogy $\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty \leq 1$. Ez pedig az előző lemma állítása és a tételünk feltételei miatt teljesül, hiszen $\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty \leq \delta^2$ és $\delta \leq 1$.

A $\delta < 1$ feltétel nyilván biztosítja a $\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty < 1$ feltételt, ami ahhoz kell, hogy $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+) \in \mathcal{D}_+$ teljesüljön.

Legyen $\mathbf{u}^+ := \sqrt{\frac{\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+}{\mu}}$ ekkor $(\mathbf{u}^+)^2 = \frac{\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+}{\mu} = (\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s)$, teljesül a (6.1) azonosság miatt. Jelölje $\delta^+ := \delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu)$ az új megengedett, belsőpont megoldás távolságát a célul kitűzött μ -centrumtól, a centralitás mértékében mérve. Ekkor

$$\begin{aligned} 2\delta^+ &= \left\| (\mathbf{u}^+)^{-1} - \mathbf{u}^+ \right\| = \left\| (\mathbf{u}^+)^{-1} (\mathbf{e} - (\mathbf{u}^+)^2) \right\| = \left\| (\mathbf{u}^+)^{-1} (\mathbf{e} - \mathbf{e} - \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s) \right\| \\ &= \left\| \frac{\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s}{\sqrt{\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s}} \right\| \leq \frac{\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|}{\sqrt{1 - \|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty}} \leq \frac{\sqrt{2} \delta^2}{\sqrt{1 - \delta^2}}, \end{aligned}$$

és így

$$\delta^+ \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^2)}},$$

adódik, azaz az új megoldás μ -centrumtól való távolságát megtudtuk becsülni a teljes Newton-lépés megtétele előtti megoldás μ -centrumtól való távolságának a függvényében. ■

A 6.5. Lemma alapján a teljes Newton-lépés megtételével előállított belsőpontos megoldás dualitás rése megegyezik a célul kitűzött μ -centrum dualitás részével, azaz

$$(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = n \mu.$$

Ez nyilván egy fontos tulajdonsága az új megoldásnak, hiszen a célul kitűzött μ -centrum dualitás részét elértük, még akkor is, ha nem sikerült olyan megoldást előállítanunk, amely esetén $x_i^+ s_i^+ = \mu$ teljesülne, bármely i index esetén.

Lényeges feltétele volt a teljes Newton-lépés megtételének az, hogy a μ -centrum és a kiinduláskor adott belsőpont távolsága, a dualitás részben mérve, 1-nél kisebb volt.

Matematikai intuíciónk azt súgja, hogy az iteráció után előálló új belsőpont távolsága az adott cél μ -centrumtól, azaz a δ^+ legyen (jóval) kisebb 1-nél, mert ebben az esetben tudnánk egy olyan $\mu^+ > 0$ centrum paramétert megadni, amelyre

$$\mu^+ < \mu \quad \text{és} \quad \delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu^+) < 1,$$

teljesül. Ez lenne annak a feltétele, hogy az iteráció az új adott pontból, az új cél μ -centrum felé megtehető legyen és a dualitás rész közben csökkenjen.

Megfogalmazhatjuk annak a feltételét, hogy $\delta^+ \leq 1$, teljesüljön. Mivel nem szeretnénk sem a δ , sem pedig a δ^+ értékét iterációról iterációra pontosan kiszámolni, inkább a becslésekkel dolgoznánk, ezért a $\delta^+ \leq 1$, feltétel helyett, azt kell megvizsgálnunk, hogy az előző tételben kapott felsőkorlát mikor lesz 1-nél kisebb, vagyis

$$\frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^2)}} \leq 1.$$

Ez persze egy korlátozóbb feltétel, mint a $\delta^+ \leq 1$, volt, és elemi számolással belátható, hogy a következő hiányos, negyedfokú egyenlőtlenségre vezet

$$\delta^4 + 2\delta^2 - 2 \leq 0.$$

Ebből pedig a következő korlátozást kapjuk a δ értékére

$$\delta \leq \sqrt{\sqrt{3} - 1} \leq 0,8556.$$

Úgy tűnik, hogy ez az elképzelésünk további korlátozást ad a δ értékére. Persze nem szabad elfelejtenünk, hogy a δ^+ helyett, egy nála rosszabb felsőkorlát képezte a kiindulásunkat. Ebben az esetben felmerül az igény, hogy minél pontosabb felsőkorlátot számoljunk ki.

Alkalmazhatnánk persze egy kissé eltérő gondolatmenetet is, annak érdekében, hogy megfelelő új μ^+ értéket tudjunk választani, azaz elvárhatnánk azt, hogy $\delta^+ \leq \delta \leq 1$, teljesüljön. Ebben az esetben is a δ^+ értéke helyett, az arra adott felsőkorlással tudunk csak számolni, amivel rontjuk a becsléseinket. Ekkor a

$$\frac{\delta^2}{\sqrt{2(1-\delta^2)}} \leq \delta,$$

egyenlőtlenséget kell megoldanunk, amelyikből a

$$\delta \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \leq 0,8165,$$

adódik.

A δ értékére kapott mindkét korlát jelentősen elmarad az 1-nél, ezért jó lenne pontosabb felsőkorlátokat kapni a δ^+ értékére. Erre szolgálnak Ling lemmái.

6.11. Lemma (Ling 1. lemmája, 1993). Legyen $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^p : \mathbf{u} > -\mathbf{e}$ és $\mathbf{e}^T \mathbf{u} = \sigma$. Ekkor, ha $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{u} \leq \mathbf{0}$ akkor

$$\sum_{i=1}^p \frac{-u_i}{1+u_i} \leq \frac{-\sigma}{1+\sigma}$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha legfeljebb egy nem nulla koordinátája van az \mathbf{u} vektornak.

Bizonyítás. Ha az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ akkor $\sigma = 0$ és az egyenlőség triviálisan teljesül. Legyen

$$f : (-1, \infty)^p \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad f(\mathbf{u}) := \sum_{i=1}^p \frac{-u_i}{1+u_i}.$$

Az f függvény konvex, mert

$$\frac{\partial f}{\partial u_i}(\mathbf{u}) = \frac{-(1+u_i) - (-u_i)1}{(1+u_i)^2} = \frac{-1-u_i+u_i}{(1+u_i)^2} = -\frac{1}{(1+u_i)^2},$$

és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_j \partial u_i}(\mathbf{u}) = 0,$$

ha $i \neq j$ és

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(\mathbf{u}) = -\frac{-1 \cdot 2 \cdot (1 + u_i) \cdot 1}{(1 + u_i)^4} = \frac{2}{(1 + u_i)^3}.$$

Ekkor bármely $\mathbf{u} > -\mathbf{e}$ vektor esetén $\frac{\partial^2 f}{\partial u_i^2}(\mathbf{u}) > 0$ teljesül, ami azt jelenti, hogy az f szigorúan konvex függvény, mert $H_f(\mathbf{u})$ pozitív definit mátrix.

A lemma feltételei mellett, figyelembe véve azt, hogy $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ vektor, azt kapjuk, hogy $\mathbf{e}^T \mathbf{u} = \sigma$ ekvivalens az $\mathbf{e}^T \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{u}\right) = 1$ feltétellel, ami pontosan azt jelenti, hogy $\sum_{i=1}^p \frac{u_i}{\sigma} = 1$. és mivel $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$ vagy $\mathbf{u} \leq \mathbf{0}$, ezért $\frac{u_i}{\sigma} \geq 0$. Kihasználva az f függvény konvexitását

$$f(\mathbf{u}) = f\left(\sum_{i=1}^p \frac{u_i}{\sigma} \sigma \mathbf{e}_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \frac{u_i}{\sigma} f(\sigma \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^p \frac{u_i}{\sigma} \left(\frac{-\sigma}{1 + \sigma}\right) = \frac{-\sigma}{1 + \sigma},$$

ahol $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^p$ az i . egységvektor. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{u} = \sigma \mathbf{e}_i$, valamely i indexre. ■

Ling 1. lemmája nagyon érdekes, de technikai jellegű eredménynek tűnik, amelyik esetén nem igazán látszik, hogyan is kapcsolódhat a korábbi eredményünkhöz, a δ^+ pontosabb becsléséhez. Ebben az értelemben az eredmény fontosságát, Ling 2. lemmája mutatja majd meg, amelyik az 1. lemmára épül és lehetővé teszi majd a δ^+ becslésének az élesítését.

6.12. Lemma (Ling 2. lemmája, 1993). Legyenek az $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ortogonális vektorok, és tegyük fel, hogy $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| = 2\rho$, ahol $\rho < 1$. Ekkor

$$\mathbf{e}^T \left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e} + \mathbf{u}\mathbf{v}} - \mathbf{e} \right) \leq \frac{2\rho^4}{1 - \rho^4}.$$

Bizonyítás. Korábbi lemmánk (6.9. Lemma) bizonyításában, két ortogonális vektor Hadamard-szorzatát a következő képlettel adtuk meg

$$\mathbf{u}\mathbf{v} = \frac{1}{4} ((\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 - (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2).$$

A 6.9. Lemma bizonyításának az első része alapján

$$\|\mathbf{u}\mathbf{v}\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \frac{1}{4} 4\rho^2 = \rho^2 < 1.$$

Jelölje $\mathbf{w} = \mathbf{u}\mathbf{v}$, ekkor $\mathbf{e}^T \mathbf{w} = 0$, és $-\mathbf{e} < \mathbf{w} < \mathbf{e}$ teljesül és a

$$\|\mathbf{w}\|_\infty = \|\mathbf{u}\mathbf{v}\|_\infty \leq \rho^2 < 1,$$

adódik. Vezessük be a következő index halmazokat

$$I_+ := \{i : w_i > 0\} \quad \text{és} \quad I_- := \{i : w_i < 0\},$$

ekkor

$$\sigma := \sum_{i \in I_+} w_i = - \sum_{i \in I_-} w_i.$$

Egyszerű számolással és az előző lemma alkalmazásával

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^T \left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e} + \mathbf{u} \mathbf{v}} - \mathbf{e} \right) &= \mathbf{e}^T \left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e} + \mathbf{w}} - \mathbf{e} \right) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + w_i} - 1 \right) = \sum_{i=1}^n \frac{-w_i}{1 + w_i} \\ &= \sum_{i \in I_+} \frac{-w_i}{1 + w_i} + \sum_{i \in I_-} \frac{-w_i}{1 + w_i} \leq \frac{-\sigma}{1 + \sigma} + \frac{\sigma}{1 - \sigma} = \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma^2}, \end{aligned}$$

adódik. Az utolsó kifejezés σ monoton növekvő függvénye, ezért felső korlátjával helyettesíthető

$$\sigma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |w_i| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n (u_i^2 + v_i^2) = \frac{1}{4} \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \rho^2,$$

és így

$$\mathbf{e}^T \left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e} + \mathbf{u} \mathbf{v}} - \mathbf{e} \right) \leq \frac{2\sigma^2}{1 - \sigma^2} \leq \frac{2\rho^4}{1 - \rho^4},$$

adódik, igazolva a lemma állítását. ■

Ling lemmáinak a felhasználásával pontosabb becslést adhatunk a δ^+ érték becslésére, élésíthetjük a 6.10. Tétel becslését.

6.13. Tétel. Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ és $\mu > 0$. Ha $\delta := \delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu) < 1$ akkor

$$\delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^4)}},$$

ahol $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+) \in \mathcal{D}_+$ jelöli az iteráció utáni új belsőpont megoldást.

Bizonyítás. Legyen

$$\delta^+ := \delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu), \quad \mathbf{x}^+ = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \mathbf{x}, \quad \mathbf{s}^+ = \bar{\mathbf{s}} + \Delta \mathbf{s}$$

és

$$\mathbf{u}^+ = \sqrt{\frac{\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+}{\mu}} = \sqrt{\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s}.$$

Ekkor a $\mathbf{d}_x^T \mathbf{d}_s = 0$ összefüggést is figyelembe véve

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^+\|^2 &= \mathbf{e}^T (\mathbf{u}^+ \mathbf{u}^+) = \mathbf{e}^T (\mathbf{u}^+)^2 = \mathbf{e}^T \left(\sqrt{\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s} \right)^2 \\ &= \mathbf{e}^T (\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} + \mathbf{d}_x^T \mathbf{d}_s = n, \end{aligned}$$

adódik. Alkalmazva az előző számítás eredményét, azt kapjuk, hogy

$$4(\delta^+)^2 = \left\| (\mathbf{u}^+)^{-1} - \mathbf{u}^+ \right\|^2 = \left((\mathbf{u}^+)^{-1} - \mathbf{u}^+ \right)^T \left((\mathbf{u}^+)^{-1} - \mathbf{u}^+ \right)$$

$$\begin{aligned} &= \left\| (\mathbf{u}^+)^{-1} \right\|^2 + \|\mathbf{u}^+\|^2 - 2n = \left\| (\mathbf{u}^+)^{-1} \right\|^2 - n \\ &= \left\| \frac{\mathbf{e}}{\sqrt{\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s}} \right\|^2 - n = \mathbf{e}^T \left(\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{e} + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s} - \mathbf{e} \right). \end{aligned}$$

Alkalmazva az előző lemmát (Ling 2. lemmáját) az $\mathbf{u} = \mathbf{d}_x$ és $\mathbf{v} = \mathbf{d}_s$ vektorokkal

$$4 (\delta^+)^2 \leq \frac{2\delta^4}{1 - \delta^4} \quad \text{adódik, és így} \quad \delta^+ \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^4)}}$$

teljesül, ugyanis $\|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\| = 2\delta$, a centralitás mértékének a definíciója szerint, ahol $\delta < 1$. ■

Ha az előző tételben kapott korláttal elvégezzük ugyanazt a gondolatmenetet, amelyet Ling 1. lemmája előtt elvégeztünk, akkor a $\delta^+ \leq 1$, feltétel teljesülését a következő egyenlőtlenséggel próbáljuk meg biztosítani

$$\frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^4)}} \leq 1.$$

Egyszerű számítás után azt kapjuk, hogy

$$\delta \leq \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \leq 0,9036.$$

Hasonlóan, ha azt szeretnénk elérni, hogy $\delta^+ \leq \delta \leq 1$, teljesüljön, akkor

$$\frac{\delta^2}{\sqrt{2(1 - \delta^4)}} \leq \delta,$$

egyenlőtlenségből indulhatunk ki és egyszerű számolással a

$$2\delta^4 + \delta^2 - 2 \leq 0$$

alakú, hiányos negyedfokú polinom egyenlőtlenséghez jutunk, amelyikből

$$\delta \leq \sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{4}} \leq 0,8836$$

megkötés adódik.

Mindkét számolás illusztrálja azt a tényt, hogy élesebb korlátok meghatározásával, kevésbé korlátozó megkötéseket kapunk a δ értékre.

6.4. Belsőpontos algoritmus és elemzése

Az előző részben azt a helyzetet elemeztük ki, hogy adott egy primál-duál belsőpontunk és egy kitűzött μ -centrumunk és szeretnénk egyetlen Newton-lépéssel előállítani a μ -centrumhoz tartozó egyértelmű megoldást. Tekintettel arra, hogy a Newton-rendszer, az eredeti centrális út feladatnak, egy lineáris közelítése, a μ -centrumhoz tartozó egyértelmű megoldás előállítására nincsen esély. Ehelyett, a Newton-irányok segítségével egy olyan, a μ -centrumot

közelítő belsőpont megoldást tudunk előállítani, amelyeknek a μ -centrummal megegyező dualitás rése van, és a μ -centrumtól, a centralitás mértékében mért távolságára ismerünk egy felső korlátot. A felsőkorlátot a kiindulási belsőpont és annak a μ -centrumtól mért távolsága határozza meg.

Ebben a részben először azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogyha adott egy belsőpont, amelyik esetén az átlagos dualitás rése meghatározza azt a $\mu > 0$ paramétert, amelyikkel adott μ -centrumot közelít, akkor egy új, kisebb paraméter értékű μ -centrum távolsága, hogyan számolható ki. Megfelelő, ésszerű korlátozó feltételek mellett ez lehetővé teszi majd egy iteráció megszervezését és hatékony végrehajtását.

Ezután megfogalmazzuk a *Teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmikusan büntetőfüggvényes belsőpontos algoritmust* és igazoljuk polinomiális komplexitását.

6.14. Lemma. Legyen $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{D}_+$ és $\mu > 0 : \mathbf{x}^T \mathbf{s} = \mu n$. Továbbá, legyen $\delta := \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu)$ és $\mu^+ = (1 - \theta) \mu$. Ekkor

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu^+)^2 = (1 - \theta) \delta^2 + \frac{\theta^2 n}{4(1 - \theta)}.$$

Bizonyítás. Legyen $\delta^+ := \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu^+)$ és $\mathbf{u} = \sqrt{\frac{\mathbf{x}\mathbf{s}}{\mu}}$. Először belátjuk, hogy az $\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}$ és az \mathbf{u} vektorok ortogonálisak.

$$(\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u})^T \mathbf{u} = \mathbf{e}^T ((\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}) \mathbf{u}) = \mathbf{e}^T (\mathbf{e} - \mathbf{u}^2) = \mathbf{e}^T \mathbf{e} - \mathbf{u}^T \mathbf{u} = n - n = 0,$$

figyelembe véve, hogy az $\mathbf{x}^T \mathbf{s} = \mu n$, ezért $\|\mathbf{u}\|^2 = n$.

Az $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{D}_+$, adott belsőpont, új $\mu^+ = (1 - \theta) \mu$, paraméterű, μ -centrumtól való távolságát a centralitás mértékének definíciója szerint a következő képlettel kell kiszámolni

$$\begin{aligned} \delta^+ = \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu^+) &= \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{s}}}{\mu^+}} - \sqrt{\frac{\mu^+}{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{s}}}} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\frac{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{s}}}{(1 - \theta)\mu}} - \sqrt{\frac{(1 - \theta)\mu}{\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{s}}}} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \theta}} - \sqrt{1 - \theta} \mathbf{u}^{-1} \right\|. \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} 4(\delta^+)^2 &= \left\| \sqrt{1 - \theta} \mathbf{u}^{-1} - \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \theta}} \right\|^2 = \left\| \sqrt{1 - \theta} (\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}) - \frac{\theta \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \theta}} \right\|^2 \\ &= (1 - \theta) \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}\|^2 + \frac{\theta^2 \|\mathbf{u}\|^2}{1 - \theta} = (1 - \theta) 4\delta^2 + \frac{n\theta^2}{1 - \theta}, \end{aligned}$$

figyelembe véve, hogy az $\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}$, és az \mathbf{u} vektorok ortogonálisak, továbbá $\delta := \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}^{-1} - \mathbf{u}\|$ és $\|\mathbf{u}\|^2 = n$. Tehát a

$$\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu^+)^2 = (1 - \theta) \delta^2 + \frac{\theta^2 n}{4(1 - \theta)},$$

összefüggés teljesül, az adott belsőpont és az új, μ^+ paraméterrel adott, cél μ -centrum között. ■

Az algoritmus megfogalmazásánál világos, hogy a következő bemenő adatokra lesz szükségünk: induló belsőpontra, amely az átlagos dualitás részéhez tartozó μ -centrumától nincsen távol, azaz annak megfelelő $0 \leq \tau < 1$, paraméterű környezetében van. Az előző lemmában bevezetett, az új μ -centrum paraméterének a kiszámításához szükséges $0 < \theta < 1$ büntető paraméterre és nyilván egy a számítási pontosságot, leállási kritériumot meghatározó $\varepsilon > 0$ értékre.

Ezek ismeretében megfogalmazhatjuk a belsőpontos algoritmusunkat.

Teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmusos büntetőfüggvényes belsőpontos algoritmus

Bemenő adatok:

τ az eltérés paraméter, $0 \leq \tau < 1$;

$\varepsilon > 0$ számítási pontosság;

$\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ és $\bar{\mu} > 0$: $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mu} n$ és $\delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \bar{\mu}) \leq \tau$;

büntető paramétert módosító érték θ , $0 < \theta < 1$.

Begin

$\mathbf{x} := \bar{\mathbf{x}}$, $\mathbf{s} := \bar{\mathbf{s}}$, $\mu := \bar{\mu}$;

while $\mu n \geq (1 - \theta) \varepsilon$ **do**

begin

$\mathbf{x} := \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$;

$\mathbf{s} := \mathbf{s} + \Delta \mathbf{s}$;

$\mu := (1 - \theta) \mu$;

end

end.

A teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmusos büntetőfüggvényes belsőpontos módszer általános megfogalmazása után, egy ún. *kis lépéses* változat polinomiális lépésszámát igazoljuk $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ választás mellett.

6.15. Tétel. Legyen $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$ induló belsőpont, és $\bar{\mu} > 0$ centralitási paraméter, amelyre $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mu} n$, teljesül. Legyen továbbá adott a $\tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ eltérés és $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ a büntető paraméter, úgy, hogy az induló belsőpont μ -centrum megfelelő környezetében található, azaz $\delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu) \leq \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ahol $\mu = (1 - \theta) \bar{\mu}$. Ekkor a primál-duál logaritmusos büntetőfüggvényes algoritmus a teljes Newton lépéssel legfeljebb

$$\left\lceil 2 \sqrt{n} \log \frac{n \bar{\mu}}{\varepsilon} \right\rceil$$

lépést igényel ahhoz, hogy előállítson egy $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}, \mathbf{s}) \in \mathcal{D}_+$, amelyre $\mathbf{x}^T \mathbf{s} \leq \varepsilon$.

Bizonyítás. Az algoritmus kezdetén $\delta(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{s}}, \mu) \leq \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}$ teljesül. Egy iteráció után, a 6.13. Tétel alapján

$$\delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu) \leq \frac{\delta^2}{\sqrt{2(1-\delta^4)}} \leq \frac{\tau^2}{\sqrt{2(1-\tau^4)}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{2}$$

adódik, ahol $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+) \in \mathcal{D}_+$ jelöli az iteráció utáni új belsőpont megoldást. Egy korábbi lemma alapján azt is tudjuk az új megoldásról, hogy $(\mathbf{x}^+)^T \mathbf{s}^+ = \mu n$.

Miután $\mu^+ = (1-\theta)\mu$, ahol $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$, az előző lemma alapján

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu^+)^2 &= (1-\theta)\delta^2 + \frac{n\theta^2}{4(1-\theta)} = (1-\theta)\delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu)^2 + \frac{n\theta^2}{4(1-\theta)} \\ &< \frac{1-\theta}{4} + \frac{n\theta^2}{4(1-\theta)} < \frac{1-\theta}{4} + \frac{n(\frac{1}{4n})}{4(1-\theta)} \\ &= \frac{1-\theta}{4} + \frac{1}{16(1-\theta)} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} < \frac{1}{2} = \tau^2, \end{aligned}$$

mivel $0 < \theta = \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2}$ teljesül, bármely n esetén. Tehát az iteráció után az új pont ismét a centrális út megfelelő környezetében van, hiszen az új cél centrumtól, a centralitás mértékében mért távolsága legfeljebb τ lehet. Ez azt jelenti, hogy az iteráció előtti kiindulási állapot, kisebb μ centralitási paraméterrel, és az új, cél μ -centrum megfelelő környezetében fekvő belsőponttal ismét adott, vagyis az iteráció megismételhető.

Az algoritmus a következő módon működik: az iteráció elején adottak az $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{s}}) \in \mathcal{D}_+$, vektorok, amelyekre $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\mathbf{s}} = \bar{\mu} n$. Továbbá a $\mu = (1-\theta)\bar{\mu}$ paraméterű centrumra igaz az, hogy az induló megoldás a μ -centrum τ környezetében van, azaz $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mu) \leq \tau$. A μ -centrum elérésének érdekében felírjuk a megfelelő Newton-rendszert és kiszámoljuk az egyértelmű megoldását. A Newton-irányok segítségével, a teljes Newton-lépés megtételével előállítjuk a μ -centrumot közelítő $\mathbf{x}^+ \in \mathcal{P}_+$, $(\mathbf{y}^+, \mathbf{s}^+) \in \mathcal{D}_+$, belsőpontot. Ekkor kiszámítjuk a $\mu^+ = (1-\theta)\mu$ centrális út új paraméterét, és meghatározzuk az új μ -centrumot, a $\mu^+ \mathbf{e}$ vektort, úgy, hogy az előző lemmánk és a bizonyítás elején elvégzett számítások alapján $\delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mu^+) \leq \tau$ teljesül.

Tehát az algoritmus generál egy $(\mathbf{x}_0, \mathbf{s}_0), (\mathbf{x}_1, \mathbf{s}_1), \dots, (\mathbf{x}_k, \mathbf{s}_k), \dots$ pontsorozatot, amelynek az elemei rendre a $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k, \dots$ paraméterű centrumokhoz tartoznak, és az azoktól mért távolsága nem nagyobb, mint τ . Sőt a pontpárokhoz tartozó dualitásrés egyre kisebb, hiszen

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{s}_k = \mu_k n = (1-\theta)^k \mu_0 n,$$

ahol $1-\theta < 1$, tehát ez a sorozat geometriai, azaz tart a nullához. Mivel az iterációk által előállított pontsorozathoz tartozó dualitás rés geometriai sorozatot alkot, ezért bármely $\varepsilon > 0$ adott pontossághoz létezik k index úgy, hogy

$$\mathbf{x}_k^T \mathbf{s}_k = \mu_k n = (1-\theta)^k \mu_0 n \leq \varepsilon,$$

akkor

$$k \log(1-\theta) + \log(\mu_0 n) \leq \log \varepsilon,$$

a logaritmus monoton növekedése miatt.

Figyelembe véve a $-\log(1-\theta) \geq \theta$ összefüggést, az előző egyenlőtlenségnél egy erősebbet követelünk meg, amely valamely, az előzőleg megadott k indexnél nagyobbra biztosan teljesül

$$k \log(1-\theta) + \log(\mu_0 n) \leq -k\theta + \log(\mu_0 n) \leq \log \varepsilon,$$

tehát

$$\log(\mu_0 n) - \log \varepsilon \leq k\theta,$$

ezért

$$\frac{1}{\theta} \log \frac{\mu_0 n}{\varepsilon} \leq k,$$

valamely $k \in \mathbb{N}$ esetén.

Behelyettesítve a $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ azt kapjuk, hogy

$$2\sqrt{n} \log \frac{\mu_0 n}{\varepsilon} \leq k,$$

azaz

$$\left\lceil 2\sqrt{n} \log \frac{\mu_0 n}{\varepsilon} \right\rceil = k.$$

Mivel az esetünkben a kiinduláskor a centrum paramétere $\bar{\mu}$ volt, ezért pontosan a tétel állítását kaptuk. ■

Az előző tétel mutatja, hogy a teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmikus büntetőfüggvényes belsőpontos módszer esetén a környezet és a büntető paraméter összehangolása nagyon fontos annak érdekében, hogy az algoritmus polinomiális komplexitását igazolni tudjuk.

Ha büntető paraméter $\theta = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ értékét megvizsgáljuk, akkor nyilvánvalóvá válik, hogy a centrális út paramétert iterációról-iterációra nagyon kis mértékben csökkentjük.³ Természetesen merül fel a kérdés, hogy a centrális út paramétert lehet-e iterációról-iterációra jelentősebben csökkenteni vagy sem. Ezek az elképzelések vezetnek el az ún. *hosszú lépéses* algoritmusokhoz. Ha a hosszú lépéses módszereknél megfogalmazásra kerülő centrális út paraméter csökkentési stratégiáknál is jelentősebben szeretnénk egy-egy iterációban csökkenteni a centrális út paramétert akkor az ún. *prediktor-korrektor* algoritmusok világába jutunk el.

Annak ellenére, hogy az intuíciónk azt sugallja, hogy a hosszú lépéses illetve a prediktor-korrektor típusú algoritmusoknak gyorsabbnak kellene lenniük – és a számítási tapasztalatok is ezt igazolják vissza, – mégis az előző tételben közölt komplexitási eredmény a legjobb a lineáris programozás belsőpontos algoritmusaira.

Gyakorlati szempontból, a centrális út paraméterének csökkentésére másfajta stratégiák is lehetségesek, pl. az új cél centrum μ paraméterének a meghatározását, adott $\bar{x} \in \mathcal{P}_+$, $(\bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{D}_+$ belsőpont esetén úgy is tekinthetünk, mint egy egyváltozós, nemlineáris egyenlőtlenséget kielégítő legjobb érték meghatározására. Keresendő a μ értéke, úgy, hogy

$$\min \mu \quad \text{feltéve, hogy } \delta(\bar{x}, \bar{s}, \mu) < 1, \text{ és } \bar{\mu} > \mu > 0,$$

teljesüljön. Ha a μ paraméter értékét ilyen segédfeladat, közelítő megoldásával kapjuk meg,

³Ezért hívjuk az algoritmus elemzett variánsát *kis lépéses* algoritmusnak.

akkor beszélhetünk az adott algoritmus típus *dinamikus* centrális út paraméter meghatározására szolgáló változatról.

Annak ellenére, hogy a jegyzetnek nem célja a közölt számítási eljárások vizsgálata numerikus szempontból, néhány, egyszerű megfontolást igényelő kérdésre mégis kitérek.

Mivel tudjuk, hogy a centrális út az analitikus centrumhoz tart, így a korábban tárgyalt (B, N) partíció előállítását iterációról-iterációra egyre jobban megvalósul. Ez azt jelenti, hogy bármely i index esetén vagy x_i , vagy pedig s_i értéke tart nullához. A Newton-irányok meghatározásánál, az átskálázásnál, az aktuális belsőpontokat felhasználtuk, mint skálázó vektorokat vagy diagonális mátrixokat, ezért ahogyan tartunk az ε -optimális megoldáshoz, egyre komolyabb numerikus problémákkal kell megküzdenünk, mert az invertálásra kerülő, - átskálázott, - mátrixok egyre rosszabbul kondicionáltakká válnak. A felmerülő, komoly numerikus nehézségek ellenére, a belsőpontos algoritmusokat, azért lehet a gyakorlatban mégis hatékonyan alkalmazni, mert nem csak az egyértelmű Newton-irány rendelkezik a csökkenési irány jellemzőivel, hanem a Newton-irány mellett nagyon sok megengedett irány, egyben csökkenési irány is.⁴

A Newton-irányok kiszámításánál, mind numerikus, mind komplexitás szempontjából a leglényegesebb feladat egy $n \times n$ -es pozitív definit mátrix invertálása. Numerikus szempontból ún. *regularizálással* kaphatunk egy jobban kondicionált mátrixot és cserébe a Newton-irány helyett, egy másik csökkenési irányt állítunk elő. Komplexitás szempontjából az invertálás $\mathcal{O}(n^3)$ aritmetikai műveleti igényű, így a belsőpontos algoritmusok aritmetikai műveleti igénye $\mathcal{O}(Ln^3\sqrt{n})$, ahol L , a racionális számokkal adott, lineáris programozási feladat adatainak a leírásához szükséges tárigény.⁵

⁴Esetünkben a csökkenési irányok egy egész feltérben helyezkednek el. Igaz, hogy a Newton-irány a legmeredekebb csökkenési iránynak felel meg.

⁵Az L értékét a *Lineáris optimalizálás elmélete és pivot algoritmusai* című elektronikus jegyzetemben bevezettem és tárgyaltam.

Utószó

Be lehet-e fejezni egy jegyzet írását? Nekem nem sikerült. Inkább lekerekítettem a témát és lezártam, abbahagytam, felfüggesztettem. Remélem, hogy ennek ellenére is egy hasznos, oktatásban használható anyag állt össze.

Mi maradt ki ebből a jegyzetből? Felsorolni se tudom. Azt azonban leírhatom, hogy egy hosszabb pihenés után, ha átdolgozni szeretném a jegyzetet, miről írnék biztosan.

A belső pontos módszerek területét, elméleti szempontból feldolgoztam, viszont mindössze két belsőpontos algoritmus (*primál-duál Dikin-féle affin skálázású algoritmus* és *teljes Newton-lépéses, primál-duál logaritmikus büntetőfüggvényes belsőpontos módszer*) kifejtésére került sor. Akiknek ezen a területen hiányérzetük van, keveselik a feldolgozott algoritmusok számát, olvassák el Mariannával és Tamással írt könyv fejezetünket⁶, amelyben egy prediktor-korrektor típusú belsőpontos algoritmust is tárgyaltunk.

A *belső pontos primál-duál teljes Newton-lépéses logaritmikus barrier algoritmus*, egy olyan algoritmus, amely az elméleti alapját képezi azoknak az algoritmusoknak, amelyek vezető lineáris programozási megoldókban kerültek implementálásra, igaz nem ez, hanem az infizibilis variánsuk.⁷

Természetesen ennek az algoritmusnak vannak ún. *prediktor-korrektor* típusú továbbfejlesztett változatai illetve ezeknek a dinamikus variánsai, amelyek szintén helyet követelnek maguknak a jegyzetben. Biztosan ez lesz az témakör, amely jegyzetem első bővítését képezni fogja.

Az infizibilis indítású belső pontos algoritmusokkal ebben a jegyzetben nem foglalkoztunk, annak ellenére nem, hogy a vezető lineáris optimalizálási szoftverekbe ilyen típusú algoritmust építettek be. Az alapötletük a következő: tekintsünk egy szigorúan pozitív vektort, még akkor is, ha az nem eleme a kérdéses feladat megengedett megoldás halmazának. Az algoritmus olyan pontsorozatot generál, amelyik – optimális megoldás létezése esetén, – iterációról-iterációra csökkenti a dualitás rést és a nem megengedettség (infizibilitás) mértékét. Ilyen pontsorozaton keresztül előállít ε -optimális megoldást, amely – bizonyos feltételek megléte esetén – nem feltétlenül lesz megengedett megoldás, annak ellenére, hogy bizonyítja optimális megoldás létezését. Az így előállított ε -optimális megoldásból, a kerekítési eljárás-hoz hasonló módszerrel megengedett megoldás állítható elő, amelyiknek a dualitás rése nem rosszabb az infizibilis indítású belső pontos algoritmus által generált ε -optimális megoldás, dualitás részénél. Az igazi kérdés persze az, mi történik akkor, ha a lineáris programozási

⁶Illés T., Nagy M. és Terlaky T., *Belsőpontos módszerek a lineáris optimalizálásban*. In: A Iványi (szerk.) *Informatikai algoritmusok*, 2. kötet (pp. 1230-1297.), Budapest, Eötvös Kiadó, 2005.

⁷Ezzel kapcsolatban érdekes olvasmány **Mészáros Csaba** PhD disszertációja (1996), amelyben egy infizibilis indítású primál-duál belső pontos algoritmust mutat be és elemzi annak gyakorlati hatékonyságát.

feladatnak nincsen megengedett megoldása. Ekkor az infizibilis indítású belső pontos algoritmus által generált pontsorozat divergens lesz. Ha közelebbről megvizsgáljuk az algoritmus által generált pontsorozatot és a hozzá tartozó infizibilitási mértéket, akkor azt észleljük, hogy a fizibilis lineáris feladatokhoz hasonlóan, nagyon gyorsan csökken az infizibilitás mértéke egy pozitív szintig, majd a csökkenés leáll, és a következő néhány iterációban az adott szint közelében ingadozik az infizibilitás mértéke, és utána nagyon gyorsan divergálni kezd a pontsorozat.

Mi történt az algoritmussal? Mi a geometriai oka a viselkedésének? Tart-e a generált pontsorozat egy ún. *irreducibilis infizibilis rendszer*hez, amelyik bizonyítéka a feladat megoldhatatlanságának? Majd észelve a feladat nem megoldhatóságát, az algoritmus által generált további pontok egy divergens pontsorozatot alkotnak, ezzel mutatva ki, hogy a lineáris programozási feladat nem megoldható? Ezen a területen, legjobb tudomásom szerint, megoldatlan az a kérdés, hogy be lehet-e azonosítani egy irreducibilis infizibilis rendszert, az infizibilis indítású belső pontos algoritmus segítségével annak érdekében, hogy olyan pontot állítsunk elő, amelyik lineáris időben ellenőrizhető bizonyítékát adja a lineáris programozási feladat megoldhatatlanságának. Az elmondottakból, mindenki érezheti, hogy az infizibilis indítású belső pontos algoritmusok részletes és elemi tárgyalása nem lenne megoldható 60-80 oldalnál rövidebben. Ez a legfontosabb ok, amiért a jegyzetből kimaradt ez a témakör. Komolyabb erőfeszítést igénylő feladat lenne ezeknek az algoritmusoknak a reprezentánsait is tárgyalni, de előbb-utóbb erre is sort kellene kerítenem. Legalább egy-egy kedvenc infizibilis belső pontos algoritmusomat bemutatni.

Számos olyan témakör van, amelyek a belsőpontos módszerek számítógépes implementációjánál nélkülözhetetlenek. Ilyenek például a Cholesky-faktorizáció, amelynek kiemelt jelentősége van a csökkenési irányok kiszámításakor vagy az ún. *cross-over* eljárások, amelyek segítségével ε -optimális megoldásból, optimális bázis megoldás állítható elő. Hasonlóan fontos témakörök, a centralitás mérésére szolgáló függvények elmélete és hatása a csökkenési irány meghatározására. Nagyon fontos a centrális út környezetének a kérdése illetve az, hogyan jelöljük ki az elérni kívánt célpontot a centrális úton.

Hatalmas témakör, amelyik egyértelműen túl mutat egy mester szakos kurzuson a centrális út szűk környezetei által definiált rövid lépéses⁸ algoritmusok illetve a centrális út tág környezete által megengedett ún. hosszú lépéses algoritmusok világa és ezeknek a komplexitás kérdései. Természetesen egy-egy jól kiválasztott, hosszú lépéses algoritmust 1-2 fejezetben fel lehetne dolgozni, de ez még eléggé sok munkát igényelne.

Fontos lenne két klasszikus polinomiális algoritmust a Hacsian-féle ellipszoid módszert illetve a Karmar-féle projektív skálázású algoritmust bemutatni. Mindkét algoritmusnak érdekesek a geometriai tulajdonságai is. A jegyzet kiegészítése ezekkel a tudomány történeti jelentőségű eredményekkel könnyen, egy-két havi munkával megtehető és a jegyzet valamelyik tovább fejlesztése során megvalósítom. Ehhez illeszkedne, a lineáris optimalizálás történetéről szóló, tudomány történeti rész is. Azonban egy ilyen fejezet (tanulmány) elkészítése nagyon időigényes munka, de azért remélem, hogy valamikor elkészítek majd egy ilyen részt is.

A hallgatók szempontjából, valószínűleg fontos lenne, több, kidolgozott példával illusztrálni a tananyagot illetve a fejezetek végén, a tárgyalt témakörökhöz kapcsolódó gyakorló példákkal illetve gondolkodtató feladatokkal kiegészíteni az anyagot.

⁸A jegyzetünkben közölt primál-duál Dikin-féle affin skálázású algoritmus egy rövid lépéses változatát elemeztük, hiszen a $\tau \leq 2$ paraméterrel határoztuk a centrális út, \mathcal{C}_τ kicsi környezetét.

Jelenleg, a TÁMOP kiírás feltételeihez igazodva, számos dolgozat illetve témakör hiperhivatkozáson keresztül érhető el, azaz internet és a cikkekhez letöltési lehetőség is szükséges. A jövőben célszerű lenne, klasszikus értelemben vett hivatkozási listát is kialakítani, habár ez lényegében az egész jegyzet alapos átdolgozását jelentené, éppúgy, ahogyan a tárgymutató is, a tanulást segítő, gyorsító fontos eszköz lenne. Ezek kialakítása csak egy komolyabb átdolgozás alkalmával lesz lehetséges. Terveim szerint, először a témakörök bővítésével foglalkoznék és csak azután szánnék időt arra, hogy a klasszikus értelemben vett matematika tankönyvvé alakítsam át a jegyzetet.